

OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.

Nr. 112.

Abhandlung

über

BESTIMMTE INTEGRALE

zwischen imaginären Grenzen.

Von

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

(1825.)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.



Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird, zum kleinsten Maasse durch die Ausbildung und Verbreitung der *Unterrichtsmittel*, der Experimentalvorlesungen, Laboratorien u. s. w., bedingt. Während aber durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. *Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht.*

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der *Klassiker der exakten Wissenschaften* abgeholfen werden. In handlicher Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandlungen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Lehrenden und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadurch ein *Unterrichtsmittel* beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein *Forschungsmittel* von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die *Klassiker der exakten Wissenschaften* sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der *Mathematik*, *Astronomie*, *Physik*, *Chemie* (einschliesslich *Krystallkunde*) und *Physiologie* enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. *Arthur von Oettingen* (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. *Bruns* (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. *Wangerin* (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. *Groth* (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. *W. Pfeffer* (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. *W. Ostwald* (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss,** Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot\cdot$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

Nr. 78. **J. C. G. Jacobi**, Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 110. **J. H. van't Hoff**, Die Gesetze des chemischen Gleichgewichtes für den verdünnten, gasförmigen oder gelösten Zustand. Übersetzt und herausgegeben von Georg Bredig. Mit 7 Figuren im Text.

» 111. **N. H. Abel**, Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy**, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825.). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

Abhandlung

über

BESTIMMTE INTEGRALE

zwischen imaginären Grenzen.

Von

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

(1825.)

Herausgegeben

von

P. Stäckel.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1900.

[1]

Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen.

Von

Augustin-Louis Cauchy.

§ 1.

In einer der Akademie der Wissenschaften am 28. October 1822 vorgelegten Abhandlung, in dem neunzehnten Hefte des Journal de l'École royale polytechnique und in einer Uebersicht über meine Vorlesungen an dieser Schule habe ich nachgewiesen, wie man in allen möglichen Fällen dazu gelangen kann, die Bedeutung festzustellen, die dem Zeichen

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

beizulegen ist, das dazu dient, ein bestimmtes Integral zwischen den reellen Grenzen x_0 und X darzustellen, gleichgültig welche Beschaffenheit die mit $f(x)$ bezeichnete reelle oder imaginäre Function besitzt. Ich habe bewiesen, dass ein Integral dieser Art, wenn die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen der Integration unendlich wird, im Allgemeinen unbestimmt ist und zwar so, dass es unendlich viele Werthe zulässt, unter denen einer besondere Aufmerksamkeit verdient; ich nenne ihn den H a u p t w e r t h. Endlich habe ich gezeigt, dass die Betrachtung der Hauptwerthe der unbestimmten Integrale in Verbindung mit der Theorie der s i n g u l ä r e n I n t e g r a l e, die ich zum ersten Male in einer Abhandlung vom Jahre 1814 auseinandergesetzt hatte, ausreicht, um eine Menge von allgemeinen Formeln aufzustellen, mittelst deren [2] man bestimmte Integrale auswerthen oder doch umformen kann. Es ist meine Absicht,

heute die Grundsätze, die mich bei diesen Untersuchungen geleitet haben, auf Integrale zwischen imaginären Grenzen anzuwenden. Bekanntlich hat der Gebrauch dieser Integrale Herrn *Laplace* zu bemerkenswerthen Ergebnissen geführt.[1]) Kürzlich hat uns Herr *Brisson* gesagt, er habe sich mit Erfolg derselben Integrale und ihrer Umformung in gewöhnliche bestimmte Integrale bedient, um gegebene Functionen in Reihen zu entwickeln, deren Glieder Exponentialgrössen proportional sind mit Exponenten, die bekannte Gesetze befolgen.[2]) Endlich hat ein junger Russe, der mit vielem Scharfsinn begabt und in der Analysis des Unendlichkleinen sehr bewandert ist, Herr *Ostrogradskij*, indem er ebenfalls zu dem Gebrauch dieser Integrale und ihrer Umformung in gewöhnliche bestimmte Integrale seine Zuflucht nahm, einen neuen Beweis der Formeln gegeben, an die ich vorher erinnerte, und andere Formeln verallgemeinert, die ich in dem neunzehnten Hefte des Journal de l'École royale polytechnique vorgelegt hatte. Herr *Ostrogradskij* war so freundlich, uns die Hauptergebnisse seiner Arbeit mitzutheilen.[3]) Allein weder diese Arbeit noch irgend eine der bis jetzt veröffentlichten Abhandlungen über die verschiedenen Zweige der Integralrechnung hat den Grad der Allgemeinheit festgestellt, den ein bestimmtes Integral zwischen imaginären Grenzen zulässt, und die Zahl der Werthe, die es annehmen kann. Das ist gerade die Frage, die den Gegenstand unserer Untersuchungen bilden wird. Man wird sehen, dass ihre Lösung von der Variationsrechnung und von der Theorie der singulären Integrale abhängt und dass sie unmittelbar eine grosse Anzahl von Formeln liefert, die zur Auswerthung oder doch zur Umformung bestimmter Integrale geeignet sind. Diese Formeln begreifen als besondere Fälle sowohl die schon erwähnten in sich als auch diejenigen, die einige Geometer kürzlich auf anderen Wegen erhalten haben.

§ 2.

Um allgemein den Sinn des Zeichens

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

festzustellen, [3] wo x_0 und X relle Grenzen sind und $f(x)$ eine reelle oder imaginäre Function der Veränderlichen x

bezeichnet[1]), genügt es, das durch dieses Zeichen dargestellte bestimmte Integral als gleichbedeutend aufzufassen mit der Grenze oder einer der Grenzen, denen sich die Summe

$$(2)\qquad (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

nähert, wenn die Elemente der Differenz $X - x_0$, nämlich

$$(3)\qquad x_1 - x_0\,,\quad x_2 - x_1\,,\ \ldots\,,\ X - x_{n-1}$$

die mit demselben Vorzeichen wie diese Differenz behaftete Grössen sind, immer kleinere Zahlenwerthe erhalten. Um also mit einer und derselben Erklärung die Integrale zwischen reellen Grenzen und die Integrale zwischen imaginären Grenzen zu umfassen, hat man durch das Zeichen

$$(4)\qquad \int_{x_0 + iy_0}^{X + iY} f(z)\,dz$$

die Grenze oder eine der Grenzen darzustellen, denen sich die Summe der Producte der Form

$$(5)\qquad \begin{cases} [(x_1 - x_0) + i(y_1 - y_0)]\, f(x_0 + iy_0)\,, \\ [(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)]\, f(x_1 + iy_1)\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [(X - x_{n-1}) + i(Y - y_{n-1})]\, f(x_{n-1} + iy_{n-1}) \end{cases}$$

nähert, wenn in jeder der beiden Reihen

$$(6)\qquad \begin{cases} x_0\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\,,\ x_{n-1}\,,\ X\,, \\ y_0\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\,,\ y_{n-1}\,,\ Y\,, \end{cases}$$

deren Glieder vom ersten bis zum letzten beständig wachsen oder abnehmen, diese selben Glieder einander unendlich nahe kommen und [**4**] ihre Anzahl mehr und mehr wächst.

Um zwei Reihen dieser Art zu erhalten, genügt es

$$(7)\qquad x = \varphi(t)\,,\qquad y = \chi(t)\,,$$

vorauszusetzen, wo $\varphi(t)$ und $\chi(t)$ zwei stetige Functionen einer neuen Veränderlichen t sind, die von $t = t_0$ bis $t = T$ beständig wachsen oder abnehmen und den Bedingungen

$$(8)\qquad \begin{array}{ll} \varphi(t_0) = x_0\,, & \chi(t_0) = y_0\,, \\ \varphi(T) = X, & \chi(T) = Y \end{array}$$

genügen müssen, und alsdann durch

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X,$$

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, Y$$

die Werthe von x und y darzustellen, die den Werthen von t in einer wachsenden oder abnehmenden Reihe der Form

$$(9) \qquad t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, T$$

entsprechen.

Macht man diese Annahme und bezeichnet mit

$$A + iB$$

den Werth, der dem Integrale (4) entspricht, so hat man annähernd

$$(10) \quad \begin{cases} x_1 - x_0 = (t_1 - t_0)\,\varphi'(t_0), & y_1 - y_0 = (t_1 - t_0)\,\chi'(t_0), \\ x_2 - x_1 = (t_2 - t_1)\,\varphi'(t_1), & y_2 - y_1 = (t_2 - t_1)\,\chi'(t_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X - x_{n-1} = (T - t_{n-1})\,\varphi'(t_{n-1}), & Y - y_{n-1} = (T - t_{n-1})\,\chi'(t_{n-1}), \end{cases}$$

folglich wird der imaginäre Ausdruck $A + iB$ vermöge der vorher getroffenen Festsetzungen im Wesentlichen gleich der Summe der Producte

$$(11) \quad \begin{cases} (t_1 - t_0)[\varphi'(t_0) + i\chi'(t_0)]f[\varphi(t_0) + i\chi(t_0)], \\ (t_2 - t_1)[\varphi'(t_1) + i\chi'(t_1)]f[\varphi(t_1) + i\chi(t_1)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (T - t_{n-1})[\varphi'(t_{n-1}) + i\chi'(t_{n-1})]f[\varphi(t_{n-1}) + i\chi(t_{n-1})] \end{cases}$$

[5] oder, was auf dasselbe herauskommt, gleich dem bestimmten Integrale

$$\int_{t_0}^{T} [\varphi'(t) + i\chi'(t)]\, f\,[\varphi(t) + i\chi(t)]\, dt\,.$$

Man hat also

$$(12) \qquad A + iB = \int_{t_0}^{T} [\varphi'(t) + i\chi'(t)]\, f\,[\varphi(t) + i\chi(t)]\, dt\,,$$

und wenn man zur Abkürzung

$$(13)\qquad \varphi'(t) = x', \quad \chi'(t) = y'$$

setzt, findet man einfach

$$(14)\qquad A + iB = \int_{t_0}^{T} (x' + iy')\, f(x + iy)\, dt.$$

§ 3.

Denken wir uns jetzt, die Function $f(x + iy)$ bleibe endlich und stetig, solange x zwischen den Grenzen x_0 und X und y zwischen den Grenzen y_0 und Y eingeschlossen bleibt. In diesem besonderen Falle beweist man leicht, dass der Werth des Integrales (4), das heisst, der imaginäre Ausdruck $A + iB$, unabhängig ist von der Natur der Functionen

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t).$$

In der That, lässt man diese Functionen um die unendlich kleinen Grössen

$$(15)\qquad \varepsilon u, \quad \varepsilon v$$

wachsen, wo ε eine Zahl bezeichnet, die als unendlich klein von der ersten Ordnung vorausgesetzt werden soll, und wo u und v zwei neue Functionen von t bedeuten, die für die beiden Grenzen $t = t_0$ und $t = T$ verschwinden müssen, so wird das Integral (12) oder (14) einen entsprechenden Zuwachs erfahren, den man nach steigenden Potenzen von ε entwickeln kann. Man erhält auf diese Weise eine Reihe, bei der das [6] unendlich kleine Glied erster Ordnung das Product ist von ε mit dem Integrale

$$(16)\qquad \int_{t_0}^{T} [(u + iv)(x' + iy')\, f'(x + iy) + (u' + iv')\, f(x + iy)]\, dt.$$

Nun findet man durch factorenweise Integration

$$\int_{t_0}^{T} (u' + iv')\, f(x + iy)\, dt = -\int_{t_0}^{T} (u + iv)(x' + iy')\, f'(x + iy)\, dt.$$

Mithin reducirt sich das Integral (16) von selbst auf Null und der Zuwachs von $A + iB$ auf ein Unendlichkleines zweiter oder höherer Ordnung. Hieraus schliesst man sofort, dass,

wenn jede der Functionen x und y nach einander um unendlich kleine Grössen erster Ordnung wächst, deren Summe einen endlichen Zuwachs ergiebt, der entsprechende Zuwachs von $A + iB$ unendlich klein von der ersten Ordnung sein wird, das heisst null.

Man kann überdies bemerken, dass das Integral (16) nichts anderes ist als die totale Variation des Integrales (14) in Bezug auf die Veränderlichen x und y, wenn man diese als unbekannte Functionen auffasst. Würde man mit Benutzung der Zeichen von *Lagrange*

$$(17) \qquad u = \delta x, \quad v = \delta y$$

setzen, so würde das Integral (16) die Form

$$(18) \qquad \begin{cases} \int_{t_0}^{T} [(x' + iy')\,\delta f(x + iy) + f(x + iy)\,\delta(x' + iy')]\,dt \\ \qquad = \delta \int_{t_0}^{T} (x' + iy')\,f(x + iy)\,dt \end{cases}$$

annehmen.

Demnach beruht der Beweis des vorher ausgesprochenen Grundsatzes allein auf der Bemerkung, dass die Variation des Integrales (14) verschwindet, und das konnte man nach den Grundsätzen der Variationsrechnung voraussehen, da die Function unter dem Integralzeichen sich bei diesem Integrale auf ein vollständiges Differential reducirt.

(7) § 4.

Wir wollen jetzt voraussetzen, dass die Function $f(x + iy)$ unendlich wird für das Werthsystem

$$x = a, \quad y = b,$$

das dem Werthe $t = \tau$ der Veränderlichen t entspricht; $z = a + ib$ ist alsdann eine Wurzel der Gleichung:

$$(19) \qquad \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Wir wollen ferner mit f die Grenze bezeichnen, der sich das Product

$$[x - a + i(y - b)]\,f(x + iy)$$

nähert, wenn x sich der Grenze a und y sich der Grenze b nähert. Ist ε wieder eine unendlich kleine Zahl, so hat man ohne merklichen Fehler

$$f = \varepsilon f(a + ib + \varepsilon). \tag{20}$$

Nennt man noch $A' + iB'$ das, was aus $A + iB$ wird, wenn die Veränderlichen x und y um die unendlich kleinen Grössen εu und εv wachsen, so hat man

$$A' + iB' - (A + iB) \tag{21}$$
$$= \int_{t_0}^{T} [x' + \varepsilon u' + i(y' + \varepsilon v')] f[x + \varepsilon u + i(y + \varepsilon v)]\, dt$$
$$- \int_{t_0}^{T} (x' + iy') f(x + iy)\, dt.$$

Nun ist der Unterschied zwischen den Integralen auf der rechten Seite der Gleichung (21) immer verschwindend klein ausgenommen den Fall, dass x von a, y von b sehr wenig verschieden ist, das heisst, dass t sich sehr wenig von τ unterscheidet. Man kann daher, ohne [**8**] diesen Unterschied zu ändern, an die Stelle der Grenzen der beiden Integrale andere Grenzen setzen, die sehr nahe an τ liegen, und in Folge dessen die Integrale, um die es sich handelt, durch singuläre bestimmte Integrale ersetzen.

Wir wollen nunmehr

$$t = \tau + \varepsilon w \tag{22}$$

setzen und die Werthe von

$$x',\ y',\ u,\ v,$$

für $t = \tau$ mit

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

bezeichnen. Endlich seien λ und μ die beiden reellen Grössen, die durch die Gleichung

$$\lambda + i\mu = \frac{\gamma + i\delta}{\alpha + i\beta} \tag{23}$$

bestimmt sind; hieraus folgt

$$\mu = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{24}$$

Für sehr kleine Werthe von εw hat man im Wesentlichen:

$$(x'+iy')f(x+iy) = f\cdot\frac{x'+iy'}{x-a+i(y-b)} \qquad = \frac{f}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{w},$$

$$[x'+\varepsilon u'+i(y'+\varepsilon v')]f[x+\varepsilon u+i(y+\varepsilon v)] = \frac{f}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{w+\lambda+i\mu};$$

Nun braucht man, um die Veränderliche t in Grenzen einzuschliessen, die von τ wenig verschieden sind, nur w in die Grenzen

$$w = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad w = +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

einzuschliessen. [**9**] Mithin ergiebt sich aus der Gleichung (21):

$$(25) \qquad \begin{cases} A'+iB'-(A+iB) \\ = f\cdot\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{dw}{w+\lambda+i\mu} - f\cdot\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{dw}{w}. \end{cases}$$

Allerdings wird das Integral

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{dw}{w},$$

in dem die Function unter dem Integralzeichen für $w = 0$ unendlich wird, unbestimmt, reducirt man aber dieses Integral auf seinen Hauptwerth, das heisst auf Null, und setzt ausserdem $\varepsilon = 0$, so findet man

$$A'+iB'-(A+iB) = -if\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu\, dw}{(w+\lambda)^2+\mu^2}$$

oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$(26) \qquad (A'+iB')-(A+iB) = \mp\pi i f.$$

In dieser Formel hat man das obere oder untere Vorzeichen vorzuziehen, jenachdem die Grösse μ und die Differenz

$$\alpha\delta-\beta\gamma$$

positive oder negative Grössen sind, das heisst mit anderen Worten, jenachdem der Ausdruck

$$(27)\qquad x'v - y'u = x'\delta y - y'\delta x$$

vermöge der besonderen Annahme $t = \tau$ einen positiven oder negativen Werth annimmt. Wenn also die Incremente der Function x und y, nämlich εu und εv, ihr Vorzeichen ändern, so geschieht dasselbe mit der rechten Seite der Gleichung (26), und nennt man

$$A'' + iB''$$

den imaginären Ausdruck, der bei dieser Annahme

$$A' + iB'$$

ersetzt, so hat man

$$(28)\qquad A'' + iB'' - (A + iB) = \pm \pi i f.$$

10] Wir möchten hinzufügen, dass in den Formeln (26) und (28) $A + iB$ nicht den allgemeinen Werth des Integrales (14) bezeichnet, der wegen der vorher gemachten Annahme unbestimmt ist, sondern seinen Hauptwerth. (Siehe das Werk: *Résumé des leçons données à l'École Royale polytechnique.*)

Verbindet man die Gleichung (28) mit der Gleichung (26), so erhält man die folgende:

$$(29)\qquad A'' + iB'' - (A' + iB') = \pm 2\pi i f,$$

in der $A' + iB'$, $A'' + iB''$ zwei vollständig bestimmte Integrale bedeuten.

§ 5.

Die Formel (26), die wir aus der Betrachtung der singulären Integrale herleiteten, lässt sich auch durch ein anderes Verfahren begründen, das wir sogleich angeben wollen. Setzen wir

$$(30)\qquad f(z) = \frac{f}{z - a - ib} + \varpi(z)$$

und denken wir uns ferner, dass die Function

$$(31)\qquad \varpi(z) = \frac{(z - a - ib) f(z) - f}{z - a - ib}.$$

die durch einen Bruch dargestellt wird, dessen Zähler und Nenner bei der Annahme $z = a + ib$ verschwinden, alsdann nicht unendlich wird, so folgt aus den Gleichungen (21) und (30):

$$(32)\left\{\begin{aligned} &A' + iB' - (A + iB) \\ &= f\int_{t_0}^{T}\left[\frac{x' + \varepsilon u' + i(y' + \varepsilon v')}{x - a + \varepsilon u + i(y - b + \varepsilon v)} - \frac{x' + iy'}{x - a + i(y - b)}\right]dt \\ &+ \int_{t_0}^{T}\{(x' + \varepsilon u' + i(y' + \varepsilon v'))\,\varpi[x + \varepsilon u + i(y + \varepsilon v)] \\ &\qquad - (x' + iy')\,\varpi(x + iy)\}\,dt\,. \end{aligned}\right.$$

Da nun die Function $\varpi(z)$ auch dann einen endlichen Werth behält, wenn man $z = a + ib$ annimmt, so sind die beiden Integrale

[11]

$$(33)\left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{T}[x' + \varepsilon u' + i(y' + \varepsilon v')]\,\varpi[x + \varepsilon u + i(y + \varepsilon v)]\,dt\,, \\ &\int_{t_0}^{T}(x' + iy')\,\varpi(x + iy)\,dt \end{aligned}\right.$$

mit einander gleichwerthig; sie stellen nämlich beide den einzigen Werth des Integrales

$$\int_{x_0 + iy_0}^{X + iY}\varpi(z)\,dz$$

dar. Andererseits überzeugt man sich leicht, dass das Integral

$$(34)\quad \int\left[\frac{x' + \varepsilon u' + i(y' + \varepsilon v')}{x - a + \varepsilon u + i(y - b + \varepsilon v)} - \frac{x' + iy'}{x - a + i(y - b)}\right]dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\,l[(x - a + \varepsilon u)^2 + (y - b + \varepsilon v)^2] - \tfrac{1}{2}\,l[(x - a)^2 + (y - b)^2]$$

$$+ i\left(\operatorname{arctg}\frac{y - b + \varepsilon v}{x - a + \varepsilon u} - \operatorname{arctg}\frac{y - b}{x - a}\right) + \text{const.}$$

zwischen den Grenzen $t = t_0$ und $t = T$ genommen und auf seinen Hauptwerth reducirt, mit dem Producte

$$\pm \pi i$$

gleichwerthig ist. In der That reducirt sich der reelle Theil des Integrales (34), nämlich

$$\tfrac{1}{2}\, l\left[\frac{(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right],$$

da die beiden Functionen u und v an diesen Grenzen verschwinden, für diese beiden Grenzen auf $\tfrac{1}{2} l(1) = 0$. Was den Coefficienten von i in dem Integrale (34) betrifft, so lässt er sich in der Form

$$\operatorname{arctg}\left[\varepsilon\, \frac{(x-a)v-(y-b)u}{(x-a)(x-a+\varepsilon u)+(y-b)(y-b+\varepsilon v)}\right]$$

darstellen. Nun sieht man leicht, dass dieser Coefficient ein Glied der Form $\mp\frac{\pi i}{2}$ in dem Integrale (34) hervorbringt, wenn er zwischen den Grenzen $t = t_0$, $t = \tau$ genommen wird, und ein zweites Glied der Form $\mp\frac{\pi i}{2}$, (12) wenn dasselbe Integral zwischen den Grenzen $t = \tau$, $t = T$ genommen wird. Die Summe dieser beiden Glieder ist $\mp \pi i$, und damit ist die Gleichung (32) auf die Formel (26) reducirt.

§ 6.

Die Formeln, die wir soeben aufstellten, setzen voraus, dass die mit f bezeichnete Constante einen endlichen Werth behält, was nicht mehr stattfinden würde, wenn der Gleichung (19) mehrere Wurzeln zukämen, die dem imaginären Ausdrucke $a + ib$ gleich sind. Machen wir diese Annahme und bezeichnen wir mit m die Anzahl der Wurzeln, um die es sich handelt. Es seien ausserdem $A' + iB'$, $A'' + iB''$ die beiden Ausdrücke, in die das Integral (14) übergeht, wenn die Veränderlichen x und y 1) die unendlich kleinen Incremente εu, εv, 2) die Incremente $-\varepsilon u$, $-\varepsilon v$ erhalten. Setzen wir endlich zur Abkürzung:

$$(35)\qquad (z-a-ib)^m f(z) = \mathfrak{f}(z).$$

Die Gleichung (29) muss durch die folgende ersetzt werden:

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} & A''+iB''-(A'+iB') \\ &= \int_{t_0}^{\tau}[x'-\varepsilon u'+i(y'-\varepsilon v')]\frac{\mathfrak{f}[x-\varepsilon u+i(y-\varepsilon v)]}{[x-a-\varepsilon u+i(y-b-\varepsilon v)]^m}\,dt \\ &\quad -\int_{t_0}^{T}[x'+\varepsilon u'+i(y'+\varepsilon v')]\frac{\mathfrak{f}[x+\varepsilon u+i(y+\varepsilon v)]}{[x-a+\varepsilon u+i(y-b+\varepsilon v)]^m}\,dt. \end{aligned}\right.$$

Nun ist der Unterschied zwischen den Integralen auf der rechten Seite der Gleichung (36) sehr gering, ausgenommen den Fall, dass die Veränderliche x sehr wenig von a und die Veränderliche y sehr wenig von b verschieden ist. In diesem Falle sind die Ausdrücke

$$(37)\qquad (x - a - \varepsilon u) + i(y - b - \varepsilon v), \quad (x - a + \varepsilon u) + i(y - b + \varepsilon v)$$

selbst der Null sehr nahe, und entwickelt man die Functionen

$$f[(x - \varepsilon u) + i(y - \varepsilon v)], \quad f[(x + \varepsilon u) + i(y + \varepsilon v)]$$

nach steigenden Potenzen der Ausdrücke, um die es sich handelt, so darf man, ohne zu befürchten, dass daraus merkliche Fehler entstehen, in den erhaltenen Entwickelungen die Glieder unterdrücken, [**13**] die Potenzen von einem höheren Grade als m enthalten. Diese Ueberlegung genügt bereits, um die rechte Seite der Gleichung (36) auszuwerthen. Setzt man, um ganz streng zu sein:

$$(38)\qquad f(z) = f(a + ib) + \frac{f'(a + ib)}{1}(z - a - ib) + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(m-1)}(a + ib)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}(z - a - ib)^{m-1} + (z - a - ib)^m \varpi(z),$$

so behält die Function $\varpi(z)$ im Allgemeinen einen endlichen Werth, und die Gleichung (36) ergiebt:

$$(39)\qquad \begin{cases} A'' + iB'' - (A' + iB') \\ \quad = s_0 f(a + ib) + \frac{s_1}{1} f'(a + ib) + \cdots \\ + \frac{s_{m-2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (m-2)} f^{(m-2)}(a + ib) + \frac{s_{m-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (m-1)} f^{(m-1)}(a + ib) \\ + \int_{t_0}^{T} \{ [(x' - \varepsilon u') + i(y' - \varepsilon v')]\, \varpi[(x - \varepsilon u) + i(y - \varepsilon v)] \\ \quad - [(x' + \varepsilon u') + i(y' + \varepsilon v')]\, \varpi[(x + \varepsilon u) + i(y + \varepsilon v)]\}\, dt, \end{cases}$$

wobei s_n ein Integral bedeutet, das durch die Formel

$$(40)\qquad s_n = \int_{t_0}^{T} \left\{ \frac{(x' - \varepsilon u') + i(y' - \varepsilon v')}{[(x - a - \varepsilon u) + i(y - b - \varepsilon v)]^{m-n}} - \frac{(x' + \varepsilon u') + i(y' + \varepsilon v')}{[(x - a + \varepsilon u) + i(y - b + \varepsilon v)]^{m-n}} \right\} dt$$

dargestellt wird.

Nun verschwindet das letzte Glied der Formel 39) ebenso wie das letzte Glied der Formel 32). Ferner lässt sich die Integration, die in der Gleichung 40) angezeigt ist, ausführen, und das bestimmte Integral, das sich alsdann ergiebt, ist immer Null, ausgenommen den Fall, dass man $m - n = 1$, $n = m - 1$ annimmt. In diesem Falle findet man

$$(41)\qquad s_{m-1} = \pm 2\pi i\,.$$

Man gelangt zu demselben Ergebnisse, wenn man bemerkt, dass die Function unter dem Integralzeichen in dem Integrale s_n nur dann einen merklichen Werth hat, wenn die Grenzen von t nahe bei τ liegen, woraus folgt, dass dieses Integral als ein singuläres Integral aufgefasst werden kann. Setzt man überdies wie in § 4:

$$t = \tau + \varepsilon w\,,$$

so wird die Function, um die es sich handelt, für sehr kleine Werthe von εw so gut wie gleichwerthig mit dem Producte

[14]

$$(42)\quad \frac{1}{\varepsilon^{m-n}}\left\{\frac{\alpha+i\beta}{[(\alpha+i\beta)w-(\gamma+i\delta)]^{m-n}}-\frac{\alpha+i\beta}{[(\alpha+i\beta)w+(\gamma+i\delta)]^{m-n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^{m-n}(\alpha+i\beta)^{m-n-1}}\left[\frac{1}{(w-\lambda-i\mu)^{m-n}}-\frac{1}{(w+\lambda+i\mu)^{m-n}}\right]$$

$$=\frac{1}{(\alpha+i\beta)^{m-n-1}}\left\{\frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+i\mu)]^{m-n}}-\frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+i\mu)]^{m-n}}\right\},$$

und da für merkliche Werthe von

$$\varepsilon w = t - \tau$$

dieses Product sich mit grosser Genauigkeit auf

$$(43)\qquad \frac{1}{(\alpha+i\beta)^{m-n-1}}\left[\frac{1}{(t-\tau)^{m-n}}-\frac{1}{(t-\tau)^{m-n}}\right]\,,$$

das heisst auf Null reducirt, so schliessen wir, dass dieses Product in der Gleichung 40) an die Stelle der Function unter dem Integralzeichen gesetzt werden darf. Man hat also mit grosser Genauigkeit:

$$(44)\quad s_n = \frac{1}{(\alpha + i\beta)^{m-n-1}} \int_{t_0}^{T} \left\{ \frac{1}{[t - \tau - \varepsilon(\lambda + i\mu)]^{m-n}} - \frac{1}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + i\mu)]^{m-n}} \right\} dt\,.$$

Ferner findet man allgemein unter der Annahme $m - n > 1$:

$$(45)\quad \begin{cases} \int \left\{ \frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+i\mu)]^{m-n}} - \frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+i\mu)]^{m-n}} \right\} dt \\ \quad = \frac{1}{m-n-1} \left\{ \frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda-i\mu)]^{m-n-1}} \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+i\mu)]^{m-n-1}} \right\} + \text{const.}\,, \end{cases}$$

und da die Function von t auf der rechten Seite der Gleichung (45) für die Grenze $t = t_0$ und $t = T$ verschwindet, so ist klar, dass die rechte Seite der Gleichung (44) Null ist für alle Werthe von n, die unterhalb $m - 1$ liegen.

Nimmt man jetzt $n = m - 1$ an, so hat man einfach:

$$(46)\quad \begin{cases} s_{m-1} = \int_{t_0}^{T} \left[\frac{1}{t-\tau-\varepsilon(\lambda+i\mu)} - \frac{1}{t-\tau+\varepsilon(\lambda+i\mu)} \right] dt \\ \quad = \int_{t_0}^{T} \left[\frac{t-\tau-\varepsilon\lambda+i\varepsilon\mu}{(t-\tau-\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2} - \frac{t-\tau+\varepsilon\lambda-i\varepsilon\mu}{(t-\tau+\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2} \right] dt. \end{cases}$$

[**15**] Nun überzeugt man sich leicht, dass 1) der reelle Theil des Integrales (46) im Wesentlichen verschwindet, und 2) der imaginäre Theil, nämlich

$$(47)\quad \begin{cases} i \int_{t_0}^{T} \left[\frac{\varepsilon\mu}{(t-\tau-\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2} + \frac{\varepsilon\mu}{(t-\tau+\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2} \right] dt \\ \quad = i \int_{\frac{t_0-\tau}{\varepsilon}}^{\frac{T-\tau}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{(w-\lambda)^2+\mu^2} + \frac{1}{(w+\lambda)^2+\mu^2} \right] \mu\, dw. \end{cases}$$

sich auf

$$\pm 2\pi i$$

reducirt. Man hat also

$$s_{m-1} = \pm 2\pi i\,.$$

wo das Vorzeichen wie in der Formel (29) bestimmt ist, und die Gleichung (39) ergiebt:

$$(48)\quad A'' + iB'' - (A' + iB') = \pm 2\pi i \frac{f^{(m-1)}(a+ib)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (m-1)}\,.$$

Hieraus folgt, dass die Formel (29) auch in dem Falle gleicher Wurzeln gültig bleibt, wenn man darin die Constante f nicht mehr durch die Gleichung (20) bestimmt, sondern durch die folgende:

$$(49)\qquad f = \frac{f^{(m-1)}(a+ib)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (m-1)}$$

oder, was auf dasselbe herauskommt, durch die Gleichung:

$$(50)\qquad f = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (m-1)}\, \frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(a+ib+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}}\,,$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet, die man nach der Ausführung der Differentiationen gleich Null zu setzen hat.

§ 7.

Denken wir uns jetzt, man wolle in dem Falle gleicher Wurzeln der Gleichung (19) nicht mehr den Unterschied zwischen den beiden Integralen $A' + iB'$ und $A'' + iB''$, sondern den Unterschied berechnen, der zwischen dem ersten dieser Integrale und dem [**16**] Integrale (14) besteht. Augenscheinlich muss man die Gleichung (39) durch eine andere ersetzen von der Form:

$$(51)\quad \begin{cases} A' + iB' - (A + iB) \\ \quad = s_0 f(a+ib) + \frac{s_1}{1} f'(a+ib) + \cdots \\ + \frac{s_{m-2}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (m-2)} f^{(m-2)}(a+ib) + \frac{s_{m-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (m-1)} f^{(m-1)}(a+ib) \\ + \int_{t_0}^{T} \{[x' + \varepsilon u' + i(y' + \varepsilon v')]\, \varpi[x + \varepsilon u + i(y + \varepsilon v)] \\ \quad - (x' + iy')\, \varpi(x + iy)\}\, dt\,; \end{cases}$$

hierin stellt s_n ein Integral dar, das durch die Formel

$$(52)\quad s_n = \int_{t_0}^{T} \left\{ \frac{x' + \varepsilon u' + i(y' + \varepsilon v')}{[x - a + \varepsilon u + i(y - b + \varepsilon v)]^{m-n}} - \frac{x' + iy'}{[x - a + i(y - b)]^{m-n}} \right\} dt$$

bestimmt wird. Ferner beweist man durch Ueberlegungen, die den in § 6 angewandten ähnlich sind, dass

1) das letzte Glied der Formel (51) verschwindet und

2) die Gleichung (52) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(53)\quad s_n = \frac{1}{(\alpha + i\beta)^{m-n-1}} \left\{ \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + i\mu)]^{m-n}} - \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{(t - \tau)^{m-n}} \right\}.$$

Nun hat man, wenn zunächst $n < m - 1$ vorausgesetzt wird:

$$\int_{t_0}^{T} \frac{dt}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + i\mu)]^{m-n}}$$

$$= \frac{-1}{m-n-1} \left\{ \frac{1}{[T - \tau + \varepsilon(\lambda + i\mu)]^{m-n-1}} - \frac{1}{[t_0 - \tau + \varepsilon(\lambda + i\mu)]^{m-n-1}} \right\},$$

folglich reducirt sich für sehr kleine Werthe von ε das erste der Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (53) im Wesentlichen auf

$$(54)\quad -\frac{1}{m-n-1} \left[\frac{1}{(T - \tau)^{m-n-1}} - \frac{1}{(t_0 - \tau)^{m-n-1}} \right].$$

[**17**] **Was das zweite Integral**

$$(55)\quad \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{(t - \tau)^{m-n}}$$

betrifft, so ist es gleichwerthig mit der Summe

$$(56)\quad \int_{t_0}^{\tau} \frac{dt}{(t - \tau)^{m-n}} + \int_{\tau}^{T} \frac{dt}{(t - \tau)^{m-n}},$$

deren beide Theile unendliche Grössen mit demselben Vorzeichen darstellen, wenn $m - n$ eine gerade Zahl ist, aber unendliche Grössen mit entgegengesetztem Vorzeichen, wenn $m - n$ eine ungerade Zahl ist. Folglich wird das Integral (55) und der Werth von s_n unendlich in dem ersten Falle,

unbestimmt in dem zweiten. Da ferner der Hauptwerth des Integrales (55) im Wesentlichen gleich

$$\int_{t_0}^{i-\varepsilon} \frac{dt}{(t-i)^{m-n}} + \int_{i+\varepsilon}^{T} \frac{dt}{(t-i)^{m-n}}$$

$$= \frac{-1}{m-n-1}\left[\frac{1}{(T-i)^{m-n-1}} - \frac{1}{(t_0-i)^{m-n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{m-n-1}} + \frac{1}{(-\varepsilon)^{m-n-1}}\right]$$

ist, so sieht man, dass in dem ersten Falle dieser Hauptwerth sich sehr wenig von dem Bruche

(57) $$\frac{2}{(m-n-1)\,\varepsilon^{m-n-1}}$$

unterscheidet, während in dem zweiten Falle derselbe Werth gleich dem Producte (54) und der entsprechende Werth von s_n gleich Null ist.

Nimmt man endlich $n = m-1$ an und reducirt wiederum das Integral (55) auf seinen Hauptwerth, so findet man

(58) $$s_{m-1} = \mp \pi i,$$

wo das Zeichen $-$ oder $+$ zu wählen ist, je nachdem die Grösse μ positiv oder negativ ist.

Aus allen diesen Rechnungen folgt, dass

1) der Werth des Unterschiedes $A' + iB' - (A + iB)$ (18) unendlich gross ist, es sei denn dass in Folge der Beschaffenheit der Function $f(x+iy)$ auf der rechten Seite der Formel (51) alle Glieder verschwinden, in denen der Index n des Buchstabens s gleich einer der Zahlen

$$m-2, \quad m-4, \quad m-6, \quad \ldots$$

ist, das heisst, es sei denn, dass man

(59) $$\begin{cases} f^{(m-2)}(a+ib) = 0, \\ f^{(m-4)}(a+ib) = 0, \\ f^{(m-6)}(a+ib) = 0, \ \ldots \end{cases}$$

hat,

2) dass man, wenn die Bedingungen (59) erfüllt sind:

(60) $$A' + iB' - (A + iB) = \mp \pi i \frac{f^{(m-1)}(a+ib)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}$$

erhält, vorausgesetzt, dass durch $A + iB$ nicht der allgemeine Werth des Integrales (14) dargestellt wird, der vermöge der Annahme, die wir machten, unbestimmt ist, sondern sein Hauptwerth. Wir möchten hinzufügen, dass man, um die Gleichung (60) aus der Gleichung (26) herzuleiten, nur anzunehmen braucht, die Constante f in der letzteren sei nicht mehr durch die Formel (20), sondern durch die Formel (49) oder (50) bestimmt.

§ 8.

Wird der Bruch $f(x + iy)$ für mehrere Systeme von Werthen der Veränderlichen $x = \varphi(t)$ und $y = \chi(t)$ unendlich, die innerhalb der Grenzen $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$ liegen, so sind die entsprechenden Werthe von $z = x + iy$ eben so viele Wurzeln der Gleichung (19). Bezeichnen wir diese Wurzeln mit $z_1, z_2, \dots$ und mit $f_1, f_2, \dots$ die entsprechenden Werthe der Constanten f, die durch die Gleichung (20) oder durch die Gleichung (49) bestimmt ist. Verfährt man wie in den Paragraphen 4 und 6, so gelangt man augenscheinlich nicht zu der Formel (29), sondern zu der folgenden:

$$(61)\quad A'' + iB'' - (A' + iB') = \pm 2\pi i f_1 \pm 2\pi i f_2 \pm \dots$$

Ferner wird der Werth des Integrales (14) unbestimmt, wenn die Gleichung (19) nur einfache Wurzeln hat oder gleiche Wurzeln, (19) bei denen jedoch Bedingungen erfüllt sind, die den Bedingungen (59) gleichen, und wenn man bei der einen oder der andern Annahme das Integral, um das es sich handelt, auf seinen Hauptwerth reducirt, so findet man, indem dieser Werth mit $A + iB$ bezeichnet wird:

$$(62)\quad A' + iB' - (A + iB) = \mp \pi i f_1 \mp \pi i f_2 \mp \dots$$

Hat endlich die Gleichung (19) gleiche Wurzeln, und sind die Bedingungen (59) für diese selben Wurzeln nicht erfüllt, so wird der allgemeine Werth und der Hauptwerth des Integrales (14) unendlich, und man muss dasselbe von der Differenz

$$A' + iB' - (A + iB)$$

sagen. Das wird im Besonderen immer dann eintreten, wenn die Gleichung (19) gleiche Wurzeln in gerader Anzahl hat. In der That, denken wir uns, m bezeichne eine gerade Zahl

und die Gleichung (19) besitze m Wurzeln, die gleich dem imaginären Ausdrucke $a + ib$ sind. Bestimmt man dann die Function $f(z)$ mittelst der Formel (35), so hat die Constante $f(a + ib)$ nothwendig einen von Null verschiedenen Werth, und es kann mithin die letzte der Bedingungen (59), nämlich

$$f(a + ib) = 0 ,$$

nicht erfüllt sein.

Betrachten wir, um den im Vorhergehenden ausgesprochenen Grundsatz durch ein Beispiel zu bestätigen, das imaginäre Integral

$$(63) \qquad \int_{-1-i}^{1+i} \frac{dz}{z^2(1+z^2)},$$

in dem

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1+z^2)}$$

ist, und bezeichnen wir mit

$$A + iB$$

den Werth, den man für dieses Integral erhält, wenn

$$z = t + it$$

gesetzt wird. (20) Da die Gleichung (19) sich in diesem Falle auf

$$z^2(1+z^2) = 0$$

reducirt, so werden zwei Wurzeln dieser Gleichung gleich Null und entsprechen dem Werthe $t = 0$. Man hat ausserdem offenbar

$$(64) \qquad A + iB = \frac{1}{1+i} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t^2(1+2it^2)}$$

$$= \frac{1}{1+i} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t^2} - \int_{-1}^{+1} \frac{2i\,dt}{1+2it^2} \right).$$

Nun ist von den beiden Integralen auf der rechten Seite der Formel (64) das erste, nämlich

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t^2},$$

gleich der Summe der beiden folgenden:

$$\int_{-1}^{\varepsilon''} \frac{dt}{t^2} = \infty, \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{t^2} = \infty,$$

und hat demnach einen unendlichen positiven Werth. Mithin hat das Integral (64) auch einen unendlichen Werth.

§ 9.

Wird t aus den Gleichungen (7) eliminirt, so erhält man eine Gleichung der Form

(65) $$F(x, y) = 0,$$

und nimmt man an, dass x und y rechtwinklige Coordinaten darstellen, so stellt die Gleichung (65) eine Curve dar, die in der Ebene der x, y zwischen den beiden Punkten (x_0, y_0) und (X, Y) gezogen ist*). [21] Denken wir uns ausserdem, dass die Functionen $x = \varphi(t)$ und $y = \chi(t)$ die Bedingungen erfüllen, die wir in dem § 2 angaben, nämlich beide von $t = t_0$ bis $t = T$ wachsen oder abnehmen. Bei dieser Annahme wird der Werth von y, den man aus der Gleichung (65) entnimmt und der als Function von x bestimmt wird, im Allgemeinen von $x = x_0$ bis $x = X$ wachsen oder abnehmen, und die Curve (65) wird innerhalb eines Rechtecks liegen, das von vier den Axen parallelen Geraden gebildet wird, nämlich den Geraden, die als Gleichungen

(66) $$\begin{cases} x = x_0, & x = X, \\ y = y_0, & y = Y \end{cases}$$

haben.

Jetzt erkennt man, dass jede besondere Form der Function $F(x, y)$ eine besondere Curve und einen entsprechenden Werth des Integrales (4) liefert. Man muss sogar bemerken, dass diese Function ihre Beschaffenheit ändern kann, wenn x variirt, und in Folge dessen die Curve $F(x, y) = 0$ in ein System von geraden oder krummen Linien übergehen kann, das vom Punkte (x_0, y_0) ausgeht, um im Punkte (X, Y) zu endigen. Alsdann entspricht jeder der Linien, um die es sich handelt, ein Integral, das dem Integrale (14) ähnlich ist, in dem aber

*) Zur Abkürzung bezeichnen wir Punkte mittelst ihrer in Parenthesen eingeschlossenen Coordinaten und gerade oder krumme Linien mittelst ihrer Gleichungen.

die extremen Werthe von x und y die Coordinaten der beiden Extremitäten dieser Linie darstellen. Will man, dass eine der fraglichen Linien sich auf eine Gerade reducirt, die vom Punkte (ξ_0, η_0) nach dem Punkte (ξ, η) gezogen ist, so brauchen, damit man das entsprechende Integral erhält, x und y nur der Bedingung unterworfen zu werden, dass sie als Functionen von t aufgefasst der Gleichung

$$(67)\qquad \frac{x-\xi_0}{\xi-\xi_0} = \frac{y-\eta_0}{\eta-\eta_0}$$

genügen, und alsdann hat man nach t zwischen solchen Grenzen zu integriren, dass die extremen Werthe von x und y sich auf ξ_0 und η_0, ξ und η reduciren. Man kann zum Beispiel

$$(68)\qquad \begin{cases} x = \xi_0 + (\xi-\xi_0)t, \\ y = \eta_0 + (\eta-\eta_0)t \end{cases}$$

nehmen. [22] Alsdann wird das Integral in Bezug auf t:

$$(69)\qquad \int_0^1 [\xi-\xi_0+i(\eta-\eta_0)]\, f[(\xi_0+i\eta_0)(1-t)+(\xi+i\eta)t]\,dt.$$

Setzt man in diesem Integrale nach einander die Veränderlichen x und y an die Stelle der Veränderlichen t, so erhält es die folgenden Formen:

$$(70)\qquad \int_{\xi_0}^{\xi}\left(1+i\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0}\right) f\left[\left(1+i\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0}\right)x + i\frac{\eta_0\xi-\eta\xi_0}{\xi-\xi_0}\right]dx,$$

$$(71)\qquad \int_{\eta_0}^{\eta}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\eta-\eta_0}+i\right) f\left[\left(\frac{\xi-\xi_0}{\eta-\eta_0}+i\right)y + \frac{\eta\xi_0-\eta_0\xi}{\eta-\eta_0}\right]dy.$$

Ist endlich die Gerade, die man betrachtet, der x-Axe parallel, so hat man $\eta = \eta_0$, wodurch das Integral (70) sich auf

$$(72)\qquad \int_{\xi_0}^{\xi} f(x+i\eta)\,dx$$

reducirt. Ist ξ_0 dagegen der y-Axe parallel, so hat man $\xi = \xi_0$ und findet, dass das Integral (71) sich auf

$$(73)\qquad i\int_{\eta_0}^{\eta} f(\xi+iy)\,dy$$

reducirt.

Denken wir uns, dass allgemein eine der Linien, die zwischen dem Punkte (x_0, y_0) und dem Punkte (X, Y) gezogen sind, sich von dem Punkte (ξ_0, η_0) bis zu dem Punkte (ξ, η) erstrecke. Hat diese Linie zur Gleichung

$$(74) \qquad y = \psi(x),$$

so lässt sich das entsprechende Integral unter der Form darstellen:

$$(75) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi} [1 + i\psi'(x)] f[x + i\psi(x)]\, dx.$$

Hat dagegen diese Linie zur Gleichung

$$(76) \qquad x = \psi(y),$$

[**23**] so ist das Integral (75) durch das folgende zu ersetzen:

$$(77) \qquad \int_{\eta}^{\eta_0} [\psi'(y) + i] f[\psi(y) + iy]\, dy.$$

§ 10.

Das System der Linien, die zwischen den Punkten (x_0, y_0) und (X, Y) gezogen sind, lässt sich auf die Verbindungsgerade dieser Punkte reduciren oder, was dasselbe ist, auf die Diagonale des Rechtecks, das von den Geraden (66) gebildet wird. Den Werth des Ausdruckes (14), der dieser Diagonale entspricht, wollen wir den mittleren Werth des Integrales (4) nennen. Dieser mittlere Werth ist offenbar dem Ausdrucke (69) ähnlich und wird dargestellt durch das Integral

$$(78) \quad \int_0^1 [X - x_0 + i(Y - y_0)] f[(x_0 + iy_0)(1-t) + (X + iY)t]\, dt.$$

Setzt man an die Stelle der Diagonale des soeben erwähnten Rechteckes

1) das System der Geraden

$$(79) \qquad y = y_0, \quad x = X,$$

die mit zwei Seiten dieses Rechteckes zusammenfallen,

2) das System der Geraden

$$(80) \qquad x = x_0, \quad y = Y,$$

die mit den beiden andern Seiten zusammenfallen, so erhält man in dem einen und in dem andern Falle statt des Integrales (78) eine Summe von zwei Integralen, die den Integralen (72) und (73) ähnlich sind. Die beiden so gebildeten Summen, nämlich

$$(81) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x + iy_0)\, dx + i\int_{y_0}^{Y} f(X + iy)\, dy,$$

$$(82) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x + iY)\, dx + i\int_{y_0}^{Y} f(x_0 + iy)\, dy$$

[24 wollen wir die extremen Werthe des Integrales (4) nennen.

§ 11.

Denken wir uns jetzt, man wolle die beiden Werthe des Integrales (4) mit einander vergleichen, die zwei sehr nahe bei einander liegenden geraden oder krummen Linien entsprechen oder, was auf dasselbe herauskommt, zwei wenig verschiedenen Functionen, die nach einander für die Function $F(x, y)$ eingesetzt werden. Vermöge des Grundsatzes, der in dem § 3 aufgestellt wurde, sind diese beiden Werthe einander gleich, wenn die Function $f(x + iy)$ für die Werthe der Coordinaten x, y, die zu den Punkten auf den betrachteten Curven oder zwischen diesen selben Curven gehören, niemals unendlich wird. Findet das Gegentheil statt, ereignet es sich zum Beispiel, dass Punkte zwischen den beiden Curven reelle Grössen zu Coordinaten haben, die in gewissen Wurzeln der Gleichung (19) enthalten sind, so wird der Unterschied zwischen den beiden Werthen des Integrales (4) durch die Formel (61) bestimmt. Gehören endlich gewisse Wurzeln zu Punkten, die auf den beiden Curven liegen, so wird der Unterschied zwischen den beiden Werthen des Integrales (4) entweder unendlich oder unbestimmt. Wir möchten hinzufügen, dass in dem letzten Falle die Formel (61) ihre Gültigkeit behält, wenn man für die Integrale, die durch $A' + iB'$ und $A'' + iB''$ dargestellt werden, ihre Hauptwerthe einsetzt und die Constanten $f_1, f_2, \ldots,$ die den betrachteten Punkten entsprechen, auf die Hälfte reducirt.

Es ist unerlässlich daran zu erinnern, dass in der Formel (61) das Vorzeichen vor jedem Producte der Form

(83) $$2\pi i f \quad \text{oder} \quad \pi i f$$

— oder + ist, jenachdem die Differenz (27) einen positiven oder negativen Werth hat. Wenn man, um etwas Bestimmtes festzusetzen, annimmt, dass $t_0 < T$ ist, so lässt sich die Differenz (27) durch die folgende ersetzen:

(84) $$dx\,\delta y - dy\,\delta x.$$

[**25**] Nun überzeugt man sich leicht, dass diese Differenz für alle Punkte zwischen den beiden Curven dasselbe Vorzeichen behält, so lange diese sich nicht gegenseitig durchschneiden. Folglich müssen bei dieser Annahme alle Producte der Form (83) dasselbe Vorzeichen erhalten. Nimmt man zum Beispiel an, dass $x_0 < X$, $y_0 < Y$ und die Ordinate der zweiten Curve kleiner als die Ordinate der ersten ist, dann hat man, wenn $A' + iB'$ und $A'' + iB''$ die Werthe der Integrale (4) in Bezug auf die erste und auf die zweite Curve bezeichnen:

$$A'' + iB'' - (A' + iB') = 2\pi i(f_1 + f_2 + \cdots),$$

oder was auf dasselbe herauskommt

(85) $$A'' + iB'' = A' + iB' + 2\pi i(f_1 + f_2 + \cdots).$$

Man hat übrigens in der Formel (85) die mit $A' + iB'$ und $A'' + iB''$ bezeichneten Integrale jedesmal auf ihre Hauptwerthe zu reduciren und die Constanten $f_1, f_2, \ldots$ durch $\frac{1}{2}f_1, \frac{1}{2}f_2, \ldots$ zu ersetzen, sobald diese Constanten Punkten entsprechen, die auf einer der beiden Curven liegen, und sobald die Integrale $A' + iB'$ und $A'' + iB''$ nicht unendlich werden.

Wollte man von einer gegebenen Curve zu einer andern übergehen, die ihr nicht nahe benachbart ist, so würde es ausreichen, sich eine dritte bewegliche und in ihrer Gestalt veränderliche Curve zu denken, die man nach einander und zu zwei verschiedenen Zeiten mit den beiden festen Curven zusammenfallen lässt. Diese Ueberlegung ermöglicht es, den Unterschied zwischen den Werthen des Integrales (4) bezüglich der beiden festen Curven zu bestimmen und zu beweisen, dass

dieser Unterschied (wenn er einen endlichen Werth behält) gleich der Summe der Glieder der Form

$$\pm 2\pi i f$$

ist, die den Punkten zwischen den beiden Curven entsprechen, und der Glieder der Form

$$\pm \pi i f,$$

die den Punkten auf einer von ihnen entsprechen.

Der vorstehende Lehrsatz gilt auch für den Fall, dass man eine jede der Curven durch ein [26] System von geraden oder krummen Linien ersetzt, die einen Umriss (contour) bilden, der vom Punkte (x_0, y_0) ausgeht und im Punkte (X, Y) endigt, und er besteht auch noch dann, wenn solche Umrisse nicht in dem Rechtecke enthalten sind, das die Geraden (66) bilden. In diesem Falle liefert jedes System von geraden oder krummen Linien noch immer eine Summe von Integralen, die dem Integrale (14) ähnlich sind. Aber diese Summe würde nach den getroffenen Festsetzungen aufhören, einen besonderen Werth des Integrales (4) darzustellen.

§ 12.

Bestimmt man mit Hülfe der Grundsätze, die wir soeben entwickelten, den Unterschied zwischen den beiden Summen (81) und (82), das heisst, zwischen den extremen Werthen des Integrales (4), so findet man in dem Falle, dass dieser Unterschied einen endlichen Werth behält:

$$(86)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{X} f(x+iy_0)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} f(X+iy)\,dy \\ = \int_{x_0}^{X} f(x+iY)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} f(x_0+iy)\,dy + 2\pi i(f_1+f_2+\cdots), \end{cases}$$

wo sich die Glieder $f_1, f_2, \ldots$ auf diejenigen Wurzeln der Gleichung (19) beziehen, bei denen die reellen Theile zwischen den Grenzen x_0 und X und die Coefficienten von i zwischen den Grenzen y_0 und Y liegen. Greift man irgend eins dieser Glieder heraus, so muss es, wie wir hinzufügen möchten, auf die Hälfte reducirt werden, wenn in der entsprechenden Wurzel

der reelle Theil mit einer der Grössen x_0 und X oder der Coefficient von i mit einer der Grössen y_0 und Y zusammenfällt. Bei derselben Annahme müssen diejenigen Integrale in der Formel (86), die unbestimmt werden, auf ihre Hauptwerthe reducirt werden.

Setzt man zur Abkürzung:

$$87) \qquad \Delta = 2\pi i(f_1 + f_2 + \cdots),$$

so wird die Gleichung (86):

[27]

$$(88) \qquad \begin{cases} \int_{x_0}^{X} f(x + iy_0)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} f(X + iy)\,dy \\ = \int_{x_0}^{X} f(x + iY)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} f(x_0 + iy)\,dy + \Delta. \end{cases}$$

Die Gleichung (88) ist mit einer der allgemeinen Formeln identisch, die ich in dem Journal de l'École royale Polytechnique und in dem Bulletin de la Société Philomathique vom November 1822 gegeben habe. Sie gilt nicht nur für reelle, sondern auch für imaginäre Werthe der Function $f(x)$ und lässt sich stets durch zwei reelle Gleichungen ersetzen, die man erhält, indem auf beiden Seiten 1) die reellen Theile und 2) die Coefficienten von i einander gleich gesetzt werden.

Um jede Ungewissheit über den Werth der bei der Rechnung gebrauchten Zeichen zu vermeiden, hat man, wie wir hinzufügen möchten, in der Gleichung (88) die Function $f(x)$ in der Weise zu wählen, dass der Ausdruck $f(x + iy)$ stets einen einzigen Werth besitzt und für alle Werthe von x und y innerhalb der Grenzen der Integration vollständig bestimmt bleibt.

Diese Bedingung lässt sich auch in dem Falle erfüllen, dass $f(x + iy)$ Logarithmen oder irrationale Potenzen veränderlicher Grössen enthält, das heisst Ausdrücke der Form

$$89) \qquad (u + iv)^{\mu}, \quad l(u + iv),$$

wo μ eine reelle Grösse bezeichnet, während u und v zwei reelle und bestimmte Functionen der Veränderlichen x und y sind. In der That genügen die Ausdrücke (89) der erforderten Bedingung, wenn die Grösse u für alle Werthe von x und y innerhalb der Integrationsgrenzen positiv bleibt und man sich den Verabredungen anschliesst, die wir in dem Cours d'Analyse

algébrique und in den vorhergehenden Abhandlungen getroffen haben[6].

Nach diesen Verabredungen dient das Zeichen

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$$

dazu, (abgesehen vom Vorzeichen) den **28** kleinsten Bogen zu bezeichnen, dessen Tangente gleich $\frac{v}{u}$ ist, und die Zeichen (89) dienen dazu, die imaginären Ausdrücke darzustellen:

$$(u^2+v^2)^{\frac{\mu}{2}}\left[\cos\left(\mu \operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right)+i\sin\left(\mu \operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right)\right],$$

$$\tfrac{1}{2}\, l\,(u^2+v^2)+i\operatorname{arctg}\frac{v}{u}.$$

Man kann auch dem Zeichen

$$(u+iv)^{\lambda+i\mu},$$

in dem λ und μ beliebige Grössen bezeichnen, die Bedeutung einer eindeutig und vollständig bestimmten Function geben, vorausgesetzt, dass die veränderliche Grösse u einen positiven Werth besitzt. In der That hat man bei dieser Annahme allgemein

$$u+iv=e^{l(u+iv)}$$

und wird naturgemäss auf die Formel

$$(u+iv)^{\lambda+i\mu}=e^{(\lambda+i\mu)\,l(u+iv)}$$

geführt, die genügt, um die Bedeutung des Ausdruckes auf der linken Seite vollständig festzustellen. Setzt man im Besonderen $u=0$, so findet man für positive Werthe von v:

$$(iv)^{\lambda+i\mu}=e^{\lambda l(v)-\frac{\pi}{2}\mu}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu\, l(v)\right]+i\sin\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu\, l(v)\right]\right\}$$

und für negative Werthe von v:

$$(iv)^{\lambda+i\mu}=e^{\lambda l(-v)+\frac{\pi}{2}\mu}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu\, l(-v)\right]-i\sin\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu\, l(-v)\right]\right\}.$$

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x=\infty$ bei beliebigem y, so erhält man für

[29] $$x_0 = 0\,,\quad X = \infty\,,\quad y_0 = 0\,,\quad Y = b$$

aus der Gleichung (88):

$$(90)\quad \int_0^\infty f(x+ib)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx - i\int_0^b f(iy)\,dy - \Delta\,.$$

Setzt man hierin

$$f(x) = e^{-x^m}\,,$$

wo m eine beliebige Zahl bezeichnet, so ergeben sich zwei reelle Gleichungen, die als einen besonderen Fall eine Formel von Herrn *Laplace* enthalten[7]), nämlich

$$(91)\quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-b^2}\,.$$

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $y=\infty$ bei beliebigem x, so erhält man für

$$x_0 = 0\,,\quad X = a\,,\quad y_0 = 0\,,\quad Y = \infty$$

aus der Gleichung (88):

$$(92)\quad \int_0^a f(x)\,dx = \Delta - i\int_0^\infty [f(a+iy) - f(iy)]\,dy\,.$$

Setzt man hierin

$$f(x) = \varphi(x)\,e^{ibx}\,,$$

wo b eine positive Grösse bezeichnet, und schreibt alsdann auf der rechten Seite $\frac{x}{b}$ statt y, so liefert diese Gleichung das Mittel, um die Integrale

$$\int_0^a \varphi(x)\cos bx\,dx\,,\qquad \int_0^a \varphi(x)\sin bx\,dx$$

[30] in andere Integrale der Form

$$\int_0^\infty \psi\left(\frac{x}{b}\right)e^{-x}\,dx$$

umzuwandeln. Bei beträchtlichen Werthen der Zahl b genügt es, um sehr angenäherte Werthe dieser letzteren zu erhalten,

dass man die Functionen $\psi\left(\frac{x}{b}\right)$ in Reihen entwickelt, die nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen des Verhältnisses $\frac{x}{b}$ geordnet sind. Man hat dann nur noch Integrale zu berechnen, die den von Herrn *Legendre* mit dem Buchstaben Γ bezeichneten ähnlich sind, das heisst, von der Form

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

und die für ganze Werthe von n durch die Gleichung

$$\Gamma(n) = 1.2.3 \ldots (n-1)$$

bestimmt sind[8]). Die Bemerkung, die soeben gemacht wurde, ist sehr nützlich in der Theorie der Wellen, wie ich in den neuen, meiner Preisarbeit hinzugefügten Noten gezeigt habe[9]).

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x = \pm\infty$ bei beliebigem y, so erhält man für

$$x_0 = -\infty, \quad X = +\infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = b$$

aus der Gleichung (88)

$$(93) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ib)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx - \Delta.$$

Nimmt man zum Beispiel

$$f(x) = (b - ix)^{a-1} e^{-x^2},$$

[31] wo a eine rationale oder irrationale Zahl bezeichnet, so wird $\Delta = 0$, und man erhält eine Formel, die ich in dem Bulletin de la Société Philomathique gegeben habe und die die Gleichung (91) als besonderen Fall enthält.

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x = \infty$ bei beliebigem y und für $y = \infty$ bei beliebigem x, so erhält man für

$$x_0 = 0, \quad X = \infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = \infty$$

aus der Formel (88):

$$(94) \qquad \int_0^{\infty} f(x)\, dx = i\int_0^{\infty} f(iy)\, dy + \Delta.$$

Von den Ergebnissen, die die letztere Gleichung liefert, nennen wir die, welche man erhält, indem für $f(x)$ eine Function der Form

$$f(x) = \varphi(x)\, e^{ibx}$$

gewählt oder auch

$$f(x) = \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{x}$$

gesetzt wird. Die Gleichung, zu der man bei der letzteren Annahme gelangt, nämlich

$$(95)\qquad \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left(\cos y - \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{y},$$

bietet unter einer neuen Form ein Integral, das nach einer Bemerkung von *Euler* dazu dienen kann, eine grosse Menge anderer Integrale zu berechnen[10]).

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x = -\infty$ bei beliebigem y und für $y = \infty$ bei beliebigem x, so erhält man für

$$x_0 = -\infty,\quad X = 0,\quad y_0 = 0,\quad Y = \infty$$

[**32**] aus der Gleichung (88):

$$(96)\qquad \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx = -i\int_0^\infty f(iy)\, dy + A.$$

Verbindet man diese letztere Formel mit der Gleichung (94), so lassen sich daraus bemerkenswerthe Ergebnisse ableiten. Setzen wir zum Beispiel

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(r+ix)^a},$$

wo r und a zwei positive Grössen bezeichnen, von denen die zweite kleiner als die Einheit ist. Da man die Function $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \frac{1}{i^a}\,\frac{\varphi(x)}{(x - ir)^a}$$

darstellen kann, so ergiebt sich aus der Gleichung (94):

$$(97)\qquad \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(r+ix)^a}\, dx = \frac{i}{i^a}\int_0^\infty \frac{\varphi(iy)}{[i(y-r)]^a}\, dy + A.$$

wo Δ' ein besonderer Werth der Constanten Δ ist. Wird dagegen die Function $f(x)$ in der Form:

$$f(x) = \frac{1}{(-i)^a} \frac{\varphi(x)}{(-x+ir)^a}$$

dargestellt, so erhält man aus der Formel (96):

$$(98) \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(x)}{(r+ix)^a} dx = \frac{-i}{(-i)^a} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(iy)}{[i(r-y)]^a} dy + \Delta'',$$

wo Δ'' eine von Δ' verschiedene Constante ist. Addirt man jetzt die Gleichungen (97) und (98) und beachtet, dass die beiden Producte

$$i^a [i(y-r)]^a, \quad (-i)^a [i(r-y)]^a$$

[33] sich für $y > r$ auf die Ausdrücke

$$i^{2a}(y-r)^a, \quad (-i)^{2a}(r-y)^a$$

und für $y < r$ auf die eine Grösse

$$(r-y)^a$$

reduciren, so ergiebt sich, indem noch y durch $x+r$ ersetzt wird:

$$(99) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{(r+ix)^a} dx = [i^{1-2a} - (-i)^{1-2a}] \int_0^{\infty} \frac{\varphi(iy)\,dy}{(y-r)^a} + \Delta' + \Delta'' \\ \displaystyle\qquad = 2 \sin a\pi \cdot \int_0^{\infty} x^{-a} \varphi[i(r+x)]\,dx + \Delta' + \Delta''. \end{cases}$$

Durch dasselbe Verfahren erhält man bei der Annahme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(r+ix)^a\, l(r+ix)}$$

die Formel

$$(100) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{(r+ix)^a\, l(r+ix)}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{\pi \cos a\pi + \sin a\pi \cdot l(x)}{\pi^2 + [l(x)]^2} x^{-a} \varphi[i(r+x)]\,dx + \Delta' + \Delta''.$$

Man könnte noch eine grosse Anzahl von Formeln derselben Art aufstellen. Unter ihnen wollen wir die nennen, zu der die Annahme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(r+ix)^a (r+ix)^b}$$

führt; a und b bezeichnen zwei reelle Grössen, von denen die erste kleiner als die Einheit ist.

Setzt man in der Gleichung (99) nach einander

$$\varphi(x) = e^{ibx}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{(s-ix)^b},$$

[34] wo b und s positive Grössen bezeichnen, so verschwinden die Constanten Δ', Δ'', und es ergeben sich die Formeln

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{(r+ix)^a} dx = 2 \sin a\pi \cdot e^{-br} \int_0^\infty x^{-a} e^{-bx} dx$$
$$= 2 b^{a-1} e^{-br} \Gamma(1-a) \cdot \sin a\pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(r+ix)^a (s-ix)^b} = 2 \sin a\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^a (r+s+x)^b}$$

$$= 2 (r+s)^{1-a-b} \sin a\pi \int_0^\infty \frac{x^{-a} dx}{(1+x)^b}.$$

Diese letzteren lassen sich vermöge der bekannten Eigenschaften der Γ-Function folgendermaassen schreiben:

(101) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{(r+ix)^a} dx = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} b^{a-1} e^{-br}$$

und:

(102) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(r+ix)^a (s-ix)^b} = 2\pi (r+s)^{1-a-b} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}.$$

Differentiirt man sie wiederholt nach der Grösse r, so erkennt man, dass sie auch in dem Falle gelten, wo der Exponent a grösser als die Einheit wird.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Gleichungen (99), (100), (101), (102) etc. auch für imaginäre Werthe der Con-

stanten a und b bestehen bleiben, vorausgesetzt dass die Integrale in diesen Formeln endliche Werthe behalten.

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x = \pm\infty$ bei beliebigem y und für $y = \infty$ bei beliebigem x, so erhält man für

$$x_0 = -\infty, \quad X = \infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = \infty$$

allgemein aus der Gleichung (88):

[35]

(103) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \Delta$$

oder, was auf dasselbe herauskommt:

(104) $$\int_0^{\infty} \frac{f(x) + f(-x)}{2}\, dx = \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Auf den rechten Seiten der vorhergehenden Formeln besteht die durch Δ dargestellte Summe nur aus Gliedern, die sich theils auf die reellen Wurzeln der Gleichung (19), theils auf die imaginären Wurzeln mit einem positiven Coefficienten von i beziehen. Da man ferner, um diese Formeln zu erhalten, die Integrale nach y von $y = 0$ an zu nehmen hat, so folgt daraus, dass man nach Bestimmung der den verschiedenen Wurzeln entsprechenden Glieder, wozu die Formel (87) dient, diejenigen auf die Hälfte reduciren muss, die sich auf die reellen Wurzeln beziehen, das heisst auf die Wurzeln, bei denen der Coefficient von i null ist.

Die Formeln (103) und (104) reduciren, wie man sieht, die Bestimmung der Integrale, die sie enthalten, auf die Ermittelung der Wurzeln der Gleichung (19), bei denen der Coefficient von i positiv ist. Sie liefern die Werthe von fast allen bestimmten Integralen, die bekannt sind, und dazu eine grosse Anzahl andrer, unter denen die hervorgehoben werden mögen, die ich in dem 19. Hefte des Journal de l'École royale Polytechnique, in der Uebersicht der an dieser Schule gehaltenen Vorlesungen und in dem Bulletin des Sciences vom April 1825 angegeben habe.

Es ist wichtig zu bemerken, dass in dem Falle, wo die Gleichung (19) reelle Wurzeln hat, die Integrale (103) und (104) zu denen gehören, deren allgemeine Werthe unbestimmt bleiben. Diese Integrale müssen jedoch nach den Grundsätzen, die in

den vorhergehenden Paragraphen aufgestellt wurden, auf ihre Hauptwerthe reducirt werden. Es ist übrigens leicht, diese [36] Hauptwerthe in bestimmte Integrale zu verwandeln, bei denen die Functionen unter dem Integralzeichen aufhören, für besondere Werthe der Veränderlichen x unendlich gross zu werden.

Ferner möge bemerkt werden, dass in mehreren Fällen die Gleichung (19) unendlich viele Wurzeln hat. Alsdann ist die mit $\varDelta$ bezeichnete Summe, wenigstens im Allgemeinen, aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern zusammengesetzt, und es findet sich folglich jedes der Integrale (103) und (104) durch die Summe einer unendlichen Reihe dargestellt. Es wird sich jedoch oft ereignen, dass entweder die meisten Glieder der Reihe wegzuwerfen sind, weil sie zu Wurzeln gehören, in denen der Coefficient von i negativ ist, oder dass die meisten Glieder zu je zweien gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind, oder dass die Summe der Reihe leicht durch die Methode bestimmt werden kann, die wir in dem Paragraphen 13 angeben werden. Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so behalten die Gleichungen (103) und (104) die Eigenschaft, in endlichen Ausdrücken die Werthe der in ihnen enthaltenen Integrale zu liefern.

Endlich kann es sich ereignen, dass die Gleichung (19) keine Wurzeln hat, in denen der Coefficient von i positiv oder Null ist. In diesem Falle reduciren sich die Integrale (103) und (104) auf Null. Zum Beispiel findet man, wenn a, b, r, s positive Grössen bezeichnen:

(105) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{(r-ix)^a} = 0,$$

(106) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(r-ix)^a (s-ix)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(r+ix)^a (s+ix)} = 0.$$

Verbindet man die Gleichung (105) mit der Gleichung (101), so erhält man:

[37]

(107) $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(r-ix)^{-a} + (r+ix)^{-a}}{2} \cos bx\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma(a)} b^{a-1} e^{-br}, \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(r-ix)^{-a} - (r+ix)^{-a}}{2i} \sin bx\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma(a)} b^{a-1} e^{-br}. \end{cases}$$

Ich habe diese letzteren Formeln am Anfange des Jahres 1815 in einer Abhandlung gegeben, wo sie auf die Umwandlung der endlichen Differenzen der positiven Potenzen in bestimmte Integrale angewandt wurden und für die die Herren *Laplace*, *Legendre* und *Lacroix* zu Berichterstattern ernannt wurden[1]. Diese Umwandlung kann übrigens vorgenommen werden, indem man entweder die Formel (101) benutzt oder eine andre, ihr gleichwerthige, die von Herrn *Laplace* gegeben worden ist.

Aus der Verbindung der Formeln (102) und (106) ergiebt sich noch:

$$
(108)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{(r-ix)^{-a}+(r+ix)^{-a}}{2}\cdot\frac{(s-ix)^{-b}+(s+ix)^{-b}}{2}\,dx \\ \displaystyle = \int_0^\infty \frac{(r-ix)^{-a}-(r+ix)^{-a}}{2i}\cdot\frac{(s-ix)^{-b}-(s+ix)^{-b}}{2i}\,dx \\ \displaystyle = \frac{\pi}{2}(r+s)^{1-a-b}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,. \end{cases}
$$

Wird in den Formeln (103), (104) und in denen, die daraus abgeleitet werden:

$$
(109)\qquad x = \operatorname{tg} p
$$

gesetzt, so erhält man neue bestimmte Integrale in Bezug auf die Veränderliche p, die zwischen den Grenzen $p = -\frac{\pi}{2}$, $p = +\frac{\pi}{2}$ oder $p = 0$ und $p = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen sind. Verfährt man in dieser Art, bezeichnet mit $\varphi(x)$ eine [38] reelle und rationale Function der Veränderlichen x und wählt

$$
f(x) = \tfrac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) - \varphi\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)\right]\frac{l(1-ix)}{1+x^2}
$$
$$
= \cos^2 p\cdot\frac{\varphi(e^{2ip}) - \varphi(e^{-2ip})}{2i}\,(p - i\,l\cos p)\,,
$$

so lässt sich das Integral (104) auf das folgende zurückführen:

$$
(110)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(e^{2ip}) - \varphi(e^{-2ip})}{2i}\,p\,dp.
$$

Dieses letztere fällt mit einem der Integrale zusammen, die ich in der Abhandlung von 1814 (zweiter Nachtrag) vorgelegt hatte.

Setzt man ebenso zur Abkürzung

$$(111)\quad u = \frac{\varphi(e^{2ip}) + \varphi(e^{-2ip})}{2}, \quad v = \frac{\varphi(e^{2ip}) - \varphi(e^{-2ip})}{2i},$$

so bestimmt man ohne Mühe die Werthe der Integrale:

$$(112)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, l\cos p\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, l\sin p\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, l\,\mathrm{tg}\, p\, dp,$$

$$(113)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\mathrm{tg}\, p)^a\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos ap}{(\cos p)^a}\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\, l\cos p}{p^2 + (l\cos p)^2}\, dp,$$

$$(114)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(\mathrm{tg}\, p)^a\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v\sin ap}{(\cos p)^a}\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{vp}{p^2 + (l\cos p)^2}\, dp,$$

u. s. w.

Im Besonderen findet man für Werthe von r innerhalb der Grenzen -1, $+1$:

[39]

$$(115)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1 - 2r\cos 2p + r^2}\, p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l(1+r),$$

$$(116)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2p}{1 - 2r\cos 2p + r^2} (\mathrm{tg}\, p)^a\, dp = \frac{\pi}{4\cos\frac{1}{2}a\pi}\left[1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],$$

$$(117)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1 - 2r\cos 2p + r^2} (\mathrm{tg}\, p)^a\, dp = \frac{\pi}{4\sin\frac{1}{2}a\pi}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],$$

$$(118)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2p}{1 - 2r\cos 2p + r^2}\, l\cos p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1+r}{4}\right),$$

$$(119)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2p}{1 - 2r\cos p + r^2}\, l\sin p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1-r}{4}\right),$$

$$(120)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2p}{1 - 2r\cos p + r^2}\, l\,\mathrm{tg}\, p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1-r}{1+r}\right),$$

u. s. w.

Nimmt man dagegen für r eine reelle Grösse, deren numerischer Werth die Einheit überschreitet, so findet man:

$$(121)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2p}{1 - 2r\cos p + r^2}\, p\,dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(1 + \frac{1}{r}\right),$$

$$(122)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2p}{1 - 2r\cos p + r^2}\, (\operatorname{tg} p)^a\,dp = \frac{\pi}{4\cos\frac{1}{2}a\pi}\left[1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^a\right],$$

u. s. w.

Wird ferner in den Gleichungen (107) und (108) $r = 0$ oder $r = 1$, $s = 1$ und $x = \operatorname{tg} p$ gesetzt, so leitet man aus ihnen ohne Mühe mehrere bemerkenswerthe Formeln ab, von denen ich die folgende erwähne:

[40]

$$(123)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^{a+b-2} \cos(b-a)p \cdot dp = \frac{\pi}{2^{a+b-1}}\, \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}.$$

Diese letztere lässt sich durch die Gleichung ersetzen:

$$(124)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^a \cos bp \cdot dp = \frac{\pi}{2^{a+1}}\, \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)},$$

die für reelle und sogar für imaginäre Werthe der Constanten a und b besteht, vorausgesetzt, dass das Integral auf der linken Seite nicht unendlich wird. Nimmt man, um etwas Bestimmtes festzusetzen, etwa $b = ik$, so findet man

$$(125)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^a\, \frac{e^{kp} + e^{-kp}}{2}\, dp = \frac{\pi\,\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\,S},$$

wo der Werth von S durch die Formel gegeben wird:

$$(126)\quad S = \left[\int_0^\infty x^{\frac{a}{2}} e^{-x} \cos\frac{k\,l(x)}{2}\,dx\right]^2 + \left[\int_0^\infty x^{\frac{a}{2}} e^{-x} \sin\frac{k\,l(x)}{2}\,dx\right]^2.$$

Nachdem man aus den Gleichungen (103) und (104) eine grosse Anzahl besonderer Formeln hergeleitet hat, kann man daraus neue Formeln gewinnen, indem man nach den willkürlichen Constanten in den ersten Formeln differentiirt oder

integrirt. Auf diese Weise lassen sich mit Leichtigkeit die Werthe des bestimmten Integrales:

$$(127) \qquad \int_0^\infty x^{a-1}\varphi(x)\,[l(x)]^n\,dx$$

berechnen, in dem a eine reelle oder imaginäre Grösse, $\varphi(x)$ irgend eine rationale Function und n eine ganze Zahl bezeichnet. Man findet noch:

$$(128) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l\,x}\,\frac{dx}{x^2+1} = \pi\,(l\,\mathrm{tg}\,\tfrac14 a\pi - l\,\mathrm{tg}\,\tfrac14 b\pi)\,.$$

[41]

$$(129) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l\,x}\,\frac{dx}{1-x^2} = \pi\,(l\sin\tfrac12 a\pi - l\sin\tfrac12 b\pi)$$

u. s. w.

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x=\pm\infty$ bei beliebigem y und für $y=-\infty$ bei beliebigem x, so erhält man für

$$x_0=-\infty,\quad X=+\infty,\quad y_0=-\infty,\quad Y=0$$

allgemein aus der Gleichung (88):

$$(130) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -\Delta\,.$$

oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$(131) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{2}\,dx = -\tfrac12\Delta\,.$$

In diesen letzten Formeln besteht die durch Δ dargestellte Summe allein aus Gliedern, die sich theils auf die reellen Wurzeln der Gleichung (19), theils auf die imaginären Wurzeln mit einem negativen Coefficienten von i beziehen. Ferner muss man nach Bestimmung dieser verschiedenen Glieder, wozu die Gleichung (87) dient, diejenigen auf die Hälfte reduciren, die zu reellen Wurzeln gehören.

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $y=\pm\infty$ bei beliebigem x, so erhält man für

$$y_0=-\infty,\quad Y=+\infty$$

aus der Formel (88):

$$(132)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} [f(X+iy) - f(x_0+iy)]\, dy = \frac{\Delta}{i} \cdot$$

[42] Hierin besteht die durch Δ dargestellte Summe aus Gliedern, die sich auf die Wurzeln der Gleichung (19) beziehen, deren reelle Theile zwischen den Grenzen x_0 und X liegen.

Nimmt man ausserdem an, dass die Function $f(x+iy)$ für einen der Werthe $x = -\infty$, $x = +\infty$ verschwindet, so erhält man für

$$x_0 = -\infty, \quad X = a$$

oder auch

$$x_0 = -a, \quad X = \infty,$$

wo a eine positive Grösse bezeichnet, die eine der beiden Formeln:

$$(133)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(a+iy)\, dy = \frac{\Delta}{i},$$

$$(134)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(-a+iy)\, dy = -\frac{\Delta}{i} \cdot$$

Die Formeln (132), (133) und (134) sind besonders nützlich bei der Lösung von Gleichungen durch bestimmte Integrale und bei der Integration der linearen Differentialgleichungen (siehe das 19. Heft des Journal de l'École royale Polytechnique).

§ 13.

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x = \pm\infty$ bei beliebigem y und für $y = \pm\infty$ bei beliebigem x, so erhält man für

$$x_0 = -\infty, \quad X = +\infty, \quad y_0 = -\infty, \quad Y = +\infty$$

allgemein aus der Formel (88):

$$(135)\qquad \Delta = 0.$$

Wird die Function $f(x)$ rational, so reproducirt die Formel (135) ein Theorem, das ich im 17. Hefte des Journal de l'École Polytechnique bewiesen habe[12]) und mit dessen Hülfe [43] man

unmittelbar die Interpolationsformel von *Lagrange* aufstellen kann.

Hat die Gleichung (19) unendlich viele Wurzeln, so enthält die Formel (135) eine unendliche Anzahl von Gliedern und kann zur Summation von Reihen verwendet werden. Nimmt man also zum Beispiel nach einander

$$(136)\qquad f(x) = \varphi(x)\frac{\cos rx}{\sin \pi x}, \quad f(x) = \varphi(x)\frac{\sin rx}{\sin \pi x},$$

wo r eine reelle Zahl bedeutet, die kleiner als π ist, und $\varphi(x)$ einen rationalen Bruch, dessen Zähler von geringerem Grade als der Nenner ist, so lassen sich mit Hülfe der Formel (135) sofort die Summen der Reihen

$$(137)\quad \tfrac{1}{2}\varphi(0) - \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos r + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2r - \cdots,$$

$$-\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin r + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\sin 2r - \cdots$$

bestimmen. Setzt man überdies:

$$(138)\qquad s = \pm(2m+1)\pi \pm r,$$

wo m irgend eine ganze Zahl ist, so bleibt der Bogen s ganz willkürlich, und die Reihen (137) werden:

$$(139)\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\varphi(0) + \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos s + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2s + \cdots, \\ &\qquad\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin s + \frac{\varphi(2)-\varphi(-2)}{2}\sin 2s + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Wird endlich $s = 0$ gesetzt, so reducirt sich die erste der Reihen (139) auf

[44]

$$(140)\quad \tfrac{1}{2}\varphi(0) + \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2} + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2} + \cdots.$$

Giebt man $\varphi(x)$ die besonderen Werthe

$$\frac{1}{a^2 \pm x^2}, \quad \frac{x}{a^2 \pm x^2},$$

so ergeben sich die bekannten Formeln:

$$(141)\quad \tfrac{1}{2}\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{u^2-4}+\frac{1}{u^2-9}+\cdots=\frac{\pi}{2u}\cot\pi u,$$

$$(142)\quad \tfrac{1}{2}\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^2+1}+\frac{1}{u^2+4}+\frac{1}{u^2+9}+\cdots=\frac{\pi}{2u}\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}},$$

$$(143)\quad \tfrac{1}{2}\frac{1}{u^2}+\frac{\cos s}{u^2-1}+\frac{\cos 2s}{u^2-4}+\frac{\cos 3s}{u^2-9}+\cdots=\frac{\pi}{2u}\frac{\cos ru}{\sin\pi u},$$

$$(144)\quad \tfrac{1}{2}\frac{1}{u^2}+\frac{\cos s}{u^2+1}+\frac{\cos 2s}{u^2+4}+\frac{\cos 3s}{u^2+9}+\cdots=\frac{\pi}{2u}\frac{e^{ru}+e^{-ru}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}},$$

$$(145)\quad \frac{\sin s}{u^2-1}+\frac{2\sin 2s}{u^2-4}+\frac{3\sin 3s}{u^2-9}+\cdots=\pm\frac{\pi}{2}\frac{\sin ru}{\sin\pi u},$$

$$(146)\quad \frac{\sin s}{u^2+1}+\frac{2\sin 2s}{u^2+4}+\frac{3\sin 3s}{u^2+9}+\cdots=\mp\frac{e^{ru}-e^{-ru}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass auf den rechten Seiten der Gleichungen (145) und (146) das obere Vorzeichen sich auf den Fall bezieht, wo $s=\pm(2m+1)\pi+r$ ist, und das untere Vorzeichen auf den Fall, wo $s=\pm(2m+1)\pi-r$ ist.

Multiplicirt man die beiden Seiten der Formel (141) mit $2u\,du$ und integrirt darauf nach u von $u=0$ an, so ergiebt sich:

$$l\frac{\sin\pi u}{\pi u}=l(1-u^2)+l\left(1-\frac{u^2}{4}\right)+l\left(1-\frac{u^2}{9}\right)+\cdots$$

[**45**] oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$(147)\quad l\sin\pi u$$

$$=l(\pi)+l(u)+l(1-u^2)+l\left(1-\frac{u^2}{4}\right)+l\left(1-\frac{u^2}{9}\right)+\cdots$$

und daher

$$(148)\quad \sin\pi u=\pi u(1-u^2)\left(1-\frac{u^2}{4}\right)\left(1-\frac{u^2}{9}\right)\cdots.$$

Wird jetzt $u=\frac{1}{2}$ gesetzt, so erhält man die Formel von *Wallis*, nämlich

$$(149)\quad \frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots.$$

Endlich ist augenscheinlich

$$\int_0^1 l \sin \pi u \, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin p \, dp ,$$

und aus der Gleichung (119) folgt, wenn die Constante r auf Null reducirt wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin p \, dp = \frac{\pi}{2} \, l \, \tfrac{1}{2} .$$

Mithin genügt es die Formel (147) von neuem nach u, und zwar zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = 1$, zu integriren, um die Gleichung aufzustellen:

$$(150) \quad \begin{cases} l(\tfrac{1}{2}) = l(\pi) - 1 + l\left(\frac{2^2}{e^2}\right) + l\left(\frac{3^3}{1 \, . \, 2^2 e^2}\right) + l\left(\frac{4^4}{2^2 \, 3^2 \, . \, e^2}\right) \\ \qquad + l\left(\frac{5^5}{3^3 \, . \, 4^2 e^2}\right) + \cdots + l\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1} \, . \, n^2 e^2}\right] + \cdots . \end{cases}$$

In Folge dessen ist für grosse Werthe von n ohne merklichen Fehler:

[46]

$$(151) \qquad l(\tfrac{1}{2}) = l\left(\frac{\pi}{e}\right) + l\left[\frac{n^n (n+1)^{n-1}}{(1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots n)^2 e^{2n}}\right] .$$

Beachtet man überdies, dass der Ausdruck

$$(n+1)^{n+1} = n^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

sich sehr wenig von dem Producte $n^{n+1} \cdot e$ unterscheidet, und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, nachdem man die beiden Seiten der Formel (151) auf die Hälfte reducirt hat, so ergiebt sich:

$$(152) \qquad 1 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots n \, . \, e^n} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \, n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n \, \Gamma(n+1)} .$$

Die Formel (152), die um so genauer ist, je beträchtlichere Werthe man der Zahl n beilegt, ist sehr nützlich bei der Berechnung von Producten, die aus einer sehr grossen Anzahl von Factoren bestehen. Sie ist zum ersten Male von Herrn *Laplace* gegeben worden [13].

Würde man der Reihe nach

$$f(x) = \varphi(x) \frac{1 - e^x}{x - e^x}, \quad f(x) = \varphi(x) \frac{1 - \cos x}{x - \sin x},$$

$$f(x) = \varphi(x) \frac{x \sin x}{\sin x - x \cos x}, \ \cdots$$

setzen, so könnte man aus der Gleichung (135) die Summen von Reihen der Form

$$(153) \qquad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \cdots$$

ableiten, wo $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die verschiedenen reellen oder imaginären Wurzeln einer der Gleichungen

$$(154) \qquad x = e^x, \quad x = \sin x, \quad x = \operatorname{tg} x, \ \ldots$$

bezeichnen. Werden also zum Beispiel für $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Wurzeln der ersten der Gleichungen (154) genommen, so ergiebt sich:

$$(155) \quad \frac{1}{r^2 + x_1^2} + \frac{1}{r^2 + x_2^2} + \frac{1}{r^2 + x_3^2} + \cdots = \frac{1}{r} \frac{r - \sin r - r \cos r}{r^2 - 2r \sin r + 1}.$$

[47] § 14.

Bei den Anwendungen, die wir von der Formel (88) gemacht haben, haben wir vorausgesetzt, dass die Integrale in dieser Formel gleichzeitig mit den Functionen verschwinden, die sie enthalten. Das trifft auch im Allgemeinen zu. Nichts desto weniger ereignet sich in einer kleinen Anzahl besonderer Fälle das Gegentheil, und dann müssen die Gleichungen, die wir aufgestellt haben, abgeändert werden. Nimmt man also zum Beispiel für $f(x)$ eine rationale Function, bei der der Grad des Zählers kleiner ist als der Grad des Nenners, so ist der Werth der Summe Δ in Bezug auf diesen rationalen Bruch im Allgemeinen gleich Null und genügt der Gleichung (135). Nichts desto weniger hört dieser Werth von Δ auf gleich Null zu sein, wie in dem 19. Hefte des Journal de l'École Polytechnique bewiesen worden ist, wenn der Unterschied zwischen dem Grade des Zählers und dem Grade des Nenners genau gleich der Einheit ist. Um bei dieser Annahme den wahren Werth von Δ zu finden, genügt es entweder das Verfahren

anzuwenden, das in der genannten Zeitschrift angegeben worden ist, und zu untersuchen, was aus den Integralen in der Formel (88) wird, wenn die Functionen unter dem Integralzeichen verschwinden, oder die Formel (135) auf einen der rationalen Brüche

$$\frac{f(x)}{1-\varepsilon x},\quad \frac{f(x)}{1-\varepsilon^2 x^2},\quad \frac{f(x)}{1+\varepsilon^2 x^2},\ \ldots$$

anzuwenden und darauf

$$\varepsilon = 0$$

zu setzen.

Ebenso würden die Gleichungen:

$$(156)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin r}{u^2-1} - \dfrac{\sin 2r}{u^2-4} + \dfrac{\sin 3r}{u^2-9} - \cdots = -\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\sin ru}{\sin \pi u}, \\[2ex] \dfrac{\sin r}{u^2+1} - \dfrac{\sin 2r}{u^2+4} + \dfrac{\sin 3r}{u^2+9} - \cdots = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{e^{ru}-e^{-ru}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}, \end{cases}$$

zu denen man gelangt, indem

[48] $$f(x) = \frac{x}{u^2 \pm x^2}\,\frac{\sin rx}{\sin \pi x}$$

gesetzt wird, und die für alle Werthe von r zwischen den Grenzen 0 und π gelten, unrichtig werden, wenn genau

$$r = \pi$$

ist. In der That würden sich alsdann die linken Seiten auf Null und die rechten Seiten auf die Einheit reduciren. Allein es genügt, um die richtigen Gleichungen zu finden, die sie ersetzen müssen, an die Stelle von $f(x)$ die Function

$$\frac{f(x)}{1+\varepsilon^2 x^2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 x^2}\,\frac{x}{u^2 \mp x^2}\,\frac{\sin rx}{\sin \pi x}$$

zu setzen. Wendet man die Formel (135) auf diese letztere Function an und setzt darauf zuerst $r = \pi$, alsdann $\varepsilon = 0$, so ergeben sich die identischen Gleichungen:

$$\frac{\sin \pi}{u^2-1} - \frac{\sin 2\pi}{u^2-4} + \frac{\sin 3\pi}{u^2-9} - \cdots = \frac{\pi}{2}(1-1),$$

$$\frac{\sin \pi}{u^2+1} - \frac{\sin 2\pi}{u^2+4} + \frac{\sin 3\pi}{u^2+9} - \cdots = \frac{\pi}{2}(1-1).$$

§ 15.

Denken wir uns jetzt, man setze, während der Werth von Δ stets durch die Gleichung (87) bestimmt wird, die Grösse

$$(157) \qquad \frac{Y-y_0}{X-x_0} = \mathrm{tg}\,\theta\,,$$

sodass θ den Winkel darstellt, den die Verbindungsgerade der Punkte (x_0, y_0) und (X, Y) mit der x-Axe bildet. Theilen wir endlich Δ in zwei Theile Δ', Δ'', von denen der eine die Constanten $f_1, f_2, \ldots$ enthält, die dem aus der eben genannten Linie und den beiden Geraden $x = x_0$ und $y = Y$ gebildeten Dreiecke entsprechen, während der andre sich auf die Punkte des Dreiecks bezieht, das von derselben Linie und den Geraden $y = y_0$ und $x = X$ gebildet wird. [49] Vergleicht man nach einander die beiden extremen Werthe des Integrales (4) mit dem mittleren Werthe, der sich in der Form darstellen lässt:

$$(158) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X}\left(1+i\,\frac{Y-y_0}{X-x_0}\right)f\left[\left(1+i\,\frac{Y-y_0}{X-x_0}\right)x+i\,\frac{y_0X-Yx_0}{X-x_0}\right]dx \\ \displaystyle\qquad =\int_{x_0}^{X}(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)\,f[(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)\,x+i\,(y_0-x_0\,\mathrm{tg}\,\theta)]\,dx, \end{cases}$$

so ergiebt sich:

$$(159) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X}(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)\,f[(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)\,x+i\,(y_0-x_0\,\mathrm{tg}\,\theta)]\,dx \\ \displaystyle\qquad =\int_{x_0}^{X}f(x+iy_0)\,dx+i\int_{y_0}^{Y}f(X+iy)\,dy-\Delta' \end{cases}$$

und

$$(160) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X}(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)\,f[(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)\,x+i\,(y_0-x_0\,\mathrm{tg}\,\theta)]\,dx \\ \displaystyle\qquad =\int_{x_0}^{X}f(x+iY)\,dx+i\int_{y_0}^{Y}f(x_0+iy)\,dy+\Delta''. \end{cases}$$

Verschwindet die Function $f(x+iy)$ für $x=\infty$ bei beliebigem y, so erhält man für

$$x_0 = 0\,,\quad X=\infty\,,\quad y_0 = 0$$

aus der Gleichung (159), indem auf der linken Seite $x\cos\theta$ statt x geschrieben wird:

$$(161)\quad \begin{cases} \int_0^\infty f[(\cos\theta + i\sin\theta)x]\,dx \\ \quad = (\cos\theta - i\sin\theta)\left[\int_0^\infty f(x)\,dx - \varDelta'\right]. \end{cases}$$

Diese letztere Gleichung umfasst als besondere Fälle bekannte Formeln. Wird zum Beispiel:

$$f(x) = x^{a-1}e^{-x},$$

gesetzt, [50] wo a eine positive Grösse bezeichnet, so verschwindet $\varDelta'$, und aus der Formel (161) ergiebt sich:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x(\cos\theta + i\sin\theta)}dx = (\cos a\theta - i\sin a\theta)\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx,$$

und indem jetzt 1) die reellen Theile, 2) die Coefficienten von i einander gleichgesetzt werden, findet man:

$$(162)\quad \begin{cases} \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\,dx = \cos a\theta\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \\ \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\,dx = \sin a\theta\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx. \end{cases}$$

§ 16.

Indem man die Grundsätze befolgt, die in dem elften Paragraphen aufgestellt wurden, lässt sich nicht allein der Unterschied berechnen, der zwischen den extremen Werthen und dem mittleren Werthe des Integrales (4) besteht, sondern auch der Unterschied zwischen zwei Integralen oder zwei Summen von Integralen, die dem Integrale (14) ähnlich sind und die zwei Systemen von Curven entsprechen, die in der xy-Ebene willkürlich zwischen den Punkten x_0, y_0 und X, Y gezogen sind. Um ein solches System zu erhalten, genügt es, in der xy-Ebene eine Reihe von Punkten beliebig anzunehmen, deren Coordinaten beziehungsweise mit

$$x_0, y_0;\quad x_1, y_1;\quad x_2, y_2;\quad \ldots;\quad x_{n-1}, y_{n-1};\quad X, Y$$

bezeichnet werden sollen, und darauf den Punkt (x_0, y_0) durch eine erste Curve mit dem Punkte (x_1, y_1) zu verbinden, durch

eine zweite Curve den Punkt (x_1, y_1) mit dem Punkte $(x_2, y_2), \ldots$; endlich durch eine letzte Curve den Punkt (x_{n-1}, y_{n-1}) mit dem Punkte (X, Y).

Nunmehr mögen durch

$$\varphi(p, q, r, \ldots), \quad \chi(p, q, r, \ldots)$$

zwei reelle Functionen der n Veränderlichen $p, q, r, \ldots$ dargestellt werden und durch

[51] $$p_0, q_0, r_0, \ldots, \quad P, Q, R, \ldots$$

besondere Werthe von $p, q, r, \ldots$, die den Gleichungen

$$(163)\quad \begin{cases} x_0 = \varphi(p_0, q_0, r_0, \ldots), & y_0 = \chi(p_0, q_0, r_0, \ldots), \\ x_1 = \varphi(P, q_0, r_0, \ldots), & y_1 = \chi(P, q_0, r_0, \ldots), \\ x_2 = \varphi(P, Q, r_0, \ldots), & y_2 = \chi(P, Q, r_0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ X = \varphi(P, Q, R, \ldots), & Y = \chi(P, Q, R, \ldots) \end{cases}$$

genügen.

Um den Punkt (x_0, y_0) durch eine erste Curve mit dem Punkte (x_1, y_1) zu verbinden, genügt es offenbar, die Coordinaten x und y der Relation zu unterwerfen, welche die beiden simultanen Gleichungen

$$(164)\quad x = \varphi(p, q_0, r_0, \ldots), \qquad y = \chi(p, q_0, r_0, \ldots)$$

bestimmen. Ist diese Relation angenommen, so erhält man das Integral, das der ersten Curve entspricht, indem man in der Formel (12) die Veränderliche t durch die Veränderliche p, die Functionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ durch die Functionen $\varphi(p, q_0, r_0, \ldots)$, $\chi(p, q_0, r_0, \ldots)$ und die Grenzen t_0, T durch p_0 und P ersetzt. In Folge dessen wird das Integral, das der ersten Curve entspricht:

$$(165)\quad \int_{p_0}^{P} \frac{d}{dp}[\varphi(p, q_0, r_0, \ldots) + i\chi(p, q_0, r_0, \ldots)] \times f[\varphi(p, q_0, r_0, \ldots) + i\chi(p, q_0, r_0, \ldots)]\, dp.$$

Ebenso genügt es, x und y den simultanen Gleichungen

$$(166)\quad x = \varphi(P, q, r_0, \ldots), \qquad y = \chi(P, q, r_0, \ldots)$$

zu unterwerfen, damit sie die Coordinaten einer Curve darstellen, die den Punkt (x_1, y_1) mit dem Punkte (x_2, y_2) verbindet, und das Integral, das dieser zweiten Curve entspricht, lässt sich in der Form

[52] (167) $$\int_{q_0}^{Q} \frac{d}{dq}[\varphi(P, q, r_0, \ldots) + i\chi(P, q, r_0, \ldots)] \times f[\varphi(P, q, r_0, \ldots) + i\chi(P, q, r_0, \ldots)]\, dq$$

schreiben.

Indem man in dieser Weise fortfährt, erkennt man schliesslich, dass die Summe der Integrale, die sich auf die verschiedenen Curven beziehen, auf die Form gebracht werden kann:

(168) $$\left\{\begin{aligned} &\int_{p_0}^{P} \frac{d}{dp}[\varphi(p, q_0, r_0, \ldots) + i\chi(p, q_0, r_0, \ldots)] \times f[\varphi(p, q_0, r_0, \ldots) + i\chi(p, q_0, r_0, \ldots)]\, dp \\ +&\int_{q_0}^{Q} \frac{d}{dq}[\varphi(P, q, r_0, \ldots) + i\chi(P, q, r_0, \ldots)] \times f[\varphi(P, q, r_0, \ldots) + i\chi(P, q, r_0, \ldots)]\, dq \\ +&\int_{r_0}^{R} \frac{d}{dr}[\varphi(P, Q, r, \ldots) + i\chi(P, Q, r, \ldots)] \times f[\varphi(P, Q, r, \ldots) + i\chi(P, Q, r, \ldots)]\, dr + \cdots \end{aligned}\right.$$

Auf diese Weise kann der Unterschied von zwei Summen dieser Art leicht mit Hülfe der Grundsätze bestimmt werden, die in dem elften Paragraphen aufgestellt wurden.

Beschränkt man die Veränderlichen $p, q, r, \ldots$ auf die beiden folgenden p, r, so wird die Summe (168):

(169) $$\left\{\begin{aligned} &\int_{p_0}^{P} \frac{d}{dp}[\varphi(p, r_0) + i\chi(p, r_0)]\, f[\varphi(p, r_0) + i\chi(p, r_0)]\, dp \\ +&\int_{r_0}^{R} \frac{d}{dr}[\varphi(P, r) + i\chi(P, r)]\, f[\varphi(P, r) + i\chi(P, r)]\, dr. \end{aligned}\right.$$

Vertauscht man in dieser letzten Formel die Veränderlichen p und r mit einander, so erhält man eine neue Summe, deren Vergleichung mit der vorhergehenden die Gleichung liefert:

[53]

(170) $$\left\{\begin{aligned} &\int_{p_0}^{P} \frac{d}{dp}[\varphi(p, r_0) + i\chi(p, r_0)]\, f[\varphi(p, r_0) + i\chi(p, r_0)]\, dp \\ +&\int_{r_0}^{R} \frac{d}{dr}[\varphi(P, r) + i\chi(P, r)]\, f[\varphi(P, r) + i\chi(P, r)]\, dr \\ =&\int_{r_0}^{R} \frac{d}{dr}[\varphi(p_0, r) + i\chi(p_0, r)]\, f[\varphi(p_0, r) + i\chi(p_0, r)]\, dr \\ +&\int_{p_0}^{P} \frac{d}{dp}[\varphi(p, R) + i\chi(p, R)]\, f[\varphi(p, R) + i\chi(p, R)]\, dp + A; \end{aligned}\right.$$

dabei gehören die Glieder, aus denen $\varDelta$ besteht, zu den Wurzeln der Gleichung (19), welche besondere Werthe des imaginären Ausdruckes[11]

$$\varphi(p, r) + i\chi(p, r)$$

darstellen, nämlich welche den Werthen von p in den Grenzen p_0 und P und den Werthen von r in den Grenzen r_0 und R entsprechen.

Die Gleichung (170) ist mit einer allgemeinen Formel identisch, die ich in dem 19. Hefte des Journal de l'École royale Polytechnique S. 574 gegeben habe. Man leitet aus ihr unmittelbar diejenigen her, die ich auf S. 575 und den folgenden desselben Heftes und in dem Bulletin de la Société Philomathique von 1822 angeführt habe.

Setzt man im Besondern

$$\varphi(p, r) + i\chi(p, r) = re^{ip} = r(\cos p + i \sin p),$$

so wird die Gleichung (170):

$$(171)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{r_0}^{R} e^{iP} f(re^{iP})\, dr + i\int_{p_0}^{P} r_0 e^{ip} f(r_0 e^{ip})\, dp \\ &= \int_{r_0}^{R} e^{ip_0} f(re^{ip_0})\, dr + i\int_{p_0}^{P} Re^{ip} f(Re^{ip})\, dp + \varDelta, \end{aligned}\right.$$

[54] und es ist

$$(172)\qquad \varDelta = -2\pi i(f_1 + f_2 + \cdots);$$

dabei beziehen sich die Glieder $f_1, f_2, \ldots$ auf die Wurzeln der Gleichung (19), welche Werthe des imaginären Ausdrucks

$$r(\cos p + i \sin p)$$

darstellen können, die Werthen von r zwischen den Grenzen r_0 und R und Werthen von p zwischen den Grenzen p_0 und P entsprechen.

Wird in der Gleichung (171):

$$r_0 = 0, \quad R = 1, \quad p_0 = 0, \quad P = \pi,$$

gesetzt, so ergiebt sich:

$$(173)\quad \int_0^1 [f(r) + f(-r)]\, dr = -i\int_0^{\pi} e^{ip} f(e^{ip})\, dp - \varDelta$$

oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$(174) \qquad \int_0^{\pi} e^{ip} f(e^{ip})\, dp = i\int_{-1}^{+1} f(r)\, dr + i\Delta\,.$$

Diese letzte Formel, die ich in dem Bulletin de la Société Philomathique gegeben habe, enthält als besonderen Fall eine Gleichung derselben Art, wie die, welche Herr *Vernier* mit Hülfe der Entwickelung in eine Reihe bewiesen hat[15].

Würde man

$$r_0 = 0\,, \quad R = 1\,, \quad p_0 = -\pi\,, \quad P = \pi$$

setzen, so würde sich aus den Formeln (171) und (172):

$$(175) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ip} f(e^{ip})\, dp = 2\pi(f_1 + f_2 + \cdots)\,,$$

ergeben [**55**] oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$(176) \quad \int_0^{\pi} \frac{e^{ip} f(e^{ip}) + e^{-ip} f(e^{-ip})}{2}\, dp = \pi(f_1 + f_2 + \cdots)\,.$$

Die Formel (175) ist identisch mit der Gleichung (17) der Zusätze zu der letzten meiner Abhandlungen in dem 19. Hefte des Journal de l'École Polytechnique.

Werden ferner die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{1}{f(z)} = 0\,,$$

die als numerischen Werth oder als Modul eine Zahl kleiner als die Einheit haben, mit $z_1, z_2, \ldots$ bezeichnet und wird in der Formel (176) $f(z)$ durch

$$\frac{f(z)}{z}\,,$$

ersetzt, so erschliesst man daraus:

$$(177) \quad \int_0^{\pi} \frac{f(e^{ip}) + f(e^{-ip})}{2}\, dp = \pi\left[f(0) + \frac{f_1}{z_1} + \frac{f_2}{z_2} + \cdots\right],$$

wo eine jede der Constanten $f_1, f_2, \ldots$ jedesmal auf die Hälfte reducirt werden muss, wenn die entsprechende Wurzel die

Einheit zum Modul hat. Schreibt man endlich in der vorhergehenden Gleichung $2p$ statt p, so ergiebt sich:

$$(178) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(e^{2ip}) + f(e^{-2ip})}{2} dp = \frac{\pi}{2}\left[f(0) + \frac{f_1}{z_1} + \frac{f_2}{z_2} + \cdots\right].$$

Jetzt sei s eine positive Grösse und $f(x)$ eine Function von x, die in der Weise gewählt werde, dass der Ausdruck

$$f(re^{ip})$$

innerhalb der Grenzen $r = 0$, $r = 1$; $p = -\pi$, $p = +\pi$ endlich und stetig bleibt. Setzt man nach einander

[56]
$$f(x) = \left(\frac{1}{1 - sx} - \frac{1}{1 - \frac{s}{x}}\right) f(x),$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1 - sx} + \frac{1}{1 - \frac{s}{x}}\right) f(x),$$

so ergiebt sich aus der Gleichung (178):

1) Für $s < 1$:

$$(179) \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s \sin 2p}{1 - 2s\cos 2p + s^2} \frac{f(e^{2ip}) - f(e^{-2ip})}{2i} dp = \frac{\pi}{4}[f(s) - f(0)], \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - s\cos 2p}{1 - 2s\cos 2p + s^2} \frac{f(e^{2ip}) + f(e^{-2ip})}{2} dp = \frac{\pi}{4}[f(s) + f(0)]; \end{cases}$$

2) Für $s > 1$:

$$(180) \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s \sin 2p}{1 - 2s\cos 2p + p^2} \frac{f(e^{2ip}) - f(e^{-2ip})}{2} dp = \frac{\pi}{4}\left[f\left(\frac{1}{s}\right) - f(0)\right], \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - s\cos 2p}{1 - 2s\cos 2p + p^2} \frac{f(e^{2ip}) + f(e^{-2ip})}{2} dp = \frac{\pi}{4}\left[f\left(\frac{1}{s}\right) + f(0)\right]. \end{cases}$$

Dagegen findet man, wenn s auf die Einheit und das erste der Integrale (179) oder (180) auf seinen Hauptwerth reducirt wird:

$$(181)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2p}{1-\cos 2p}\,\frac{f(e^{2ip})-f(e^{-2ip})}{2i}\,dp = \frac{\pi}{2}\,(f(1)-f(0)),\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(e^{2ip})+f(e^{-2ip})}{2}\,dp = \frac{\pi}{2}\,f(0).\end{cases}$$

Die Gleichungen (179), (180), (181) lassen sich unmittelbar aus dem Theorem von Herrn *Parseval* über die Summation der [**57**] Reihen herleiten. Sie stimmen überein mit einer Formel, die Herr *Guillaume Libri* in dem 28. Bande der Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin gegeben hat, und mit denen, die wir, Herr *Poisson* und ich, in dem Bulletin de la Société Philomathique von 1822 veröffentlicht haben[16].

Wird in diesen Gleichungen der Buchstabe s durch den Buchstaben x ersetzt und der Reihe nach

$$f(x) = l(1+x), \quad f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^a, \quad f(x) = l\left(\frac{1+x}{2}\right),$$

$$f(x) = l\left(\frac{1-x}{2}\right), \quad f(x) = l\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \ \ldots$$

gewählt, so findet man genau die Formeln der Seite 38 wieder.

§ 17.

Bis jetzt haben wir nur einfache Integrale betrachtet. Die Grundsätze, die wir aufgestellt haben, lassen sich jedoch in gleicher Weise auf die Bestimmung und auf die Umformung von doppelten oder mehrfachen Integralen zwischen reellen oder imaginären Grenzen anwenden. Wir wollen indessen hier nicht genauer auf diesen Gegenstand eingehen, den wir ein andres Mal ausführlich darzustellen beabsichtigen[17], und beschliessen die vorliegende Abhandlung, indem wir angeben, wie man einige der Formeln, die wir erhalten haben, bei dem Problem der Fortpflanzung der Wellen verwerthen kann.

§ 18.

Denken wir uns, eine schwere Flüssigkeit sei in einen sehr engen Kanal eingeschlossen. Wir wählen als x-Axe die horizontale Gerade, die in dem Kanal das natürliche Niveau

bezeichnet, zu dem die Flüssigkeit sich erhebt. Ferner nehmen wir an, dass t die Zeit bezeichnet und dass man in dem Augenblicke, wo $t = 0$ gezählt wird, die Bewegung entstehen lässt, indem man das Niveau verändert, sodass die senkrechte Ordinate, die der Abscisse x entspricht:

$$(182)\qquad y = F(x)$$

wird. Man beweist leicht, dass dieselbe Ordinate nach Verlauf einer beliebigen Zeit t (**58**) durch die Gleichung:

$$(183)\quad y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\cos(\mu^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} t)\cos\mu(x-\varpi)\cdot F(\varpi)\,d\mu\,d\varpi$$

gegeben wird (siehe die Sammlung der Mémoires couronnés par l'Institut, Preisbewerbung von 1815, S. 311 [18]).

Wird in der vorhergehenden Formel:

$$\mu = \frac{\alpha^2}{x-\varpi}$$

gesetzt und zur Abkürzung

$$\frac{\frac{1}{2}g t^2}{x-\varpi} = P$$

geschrieben, so ergiebt sich:

$$(184)\quad y = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\alpha\cos(2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}\alpha)\cos(\alpha^2)F(\varpi)\frac{d\alpha\,d\varpi}{x-\varpi}\,.$$

Um diesen Werth von y zu berechnen, hat man zunächst wenigstens näherungsweise das Integral

$$(185)\qquad \int_0^{\infty}\alpha\cos(2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}\alpha)\cos(\alpha^2)\,d\alpha$$

zu bestimmen. Man würde dazu mit Leichtigkeit gelangen, wenn die Grösse P immer einen sehr kleinen numerischen Werth behielte. Dann würde es genügen, dieses Integral in eine Reihe zu entwickeln, die nach steigenden Potenzen von P geordnet ist, und die erhaltene Reihe, nämlich

$$(186)\qquad \frac{2P}{2} - \frac{(2P)^3}{4.5.6} + \frac{(2P)^5}{6.7.8.9.10} - \cdots$$

siehe S. 132 der Abhandlung Ueber die Theorie der Wellen, veröffentlicht [59] in der schon erwähnten Sammlung [19] auf eine kleine Anzahl von Gliedern zu beschränken, während die übrigen vernachlässigt werden. Da jedoch P mit wachsenden Werthen von t über jede Grenze wächst, und ebenso die verschiedenen Glieder der Reihe, so ist das Mittel, von dem wir sprachen, in den meisten Fällen nicht anwendbar, und man kann es im allgemeinen nicht dazu gebrauchen, um den angenäherten Werth des Integrales (185) zu bestimmen, ja nicht einmal um Grenzen zu finden, in denen dieses Integral eingeschlossen bleibt. Glücklicher Weise erlaubt die Gleichung (94) das Integral, um das es sich handelt, in ein andres umzuformen, dessen Berechnung nicht dieselben Schwierigkeiten bietet.

In der That, setzt man in dieser Gleichung

$$f(x) = x e^{ix^2} e^{iax},$$

so verschwindet Δ. Schreibt man darauf auf beiden Seiten den Buchstaben α statt x und y, so findet man

$$\int_0^\infty \alpha e^{i\alpha^2} e^{ia\alpha} d\alpha = -\int_0^\infty \alpha e^{-i\alpha^2} e^{-a\alpha} d\alpha$$

und daher:

$$(187) \quad \int_0^\infty \alpha \cos\alpha^2 \cos a\alpha \, d\alpha = \int_0^\infty \alpha \sin\alpha^2 \sin a\alpha \, d\alpha - \int_0^\infty \alpha \cos\alpha^2 \cdot e^{-a\alpha} d\alpha,$$

$$(188) \quad \int_0^\infty \alpha \sin\alpha^2 \cos a\alpha \, d\alpha = -\int_0^\infty \alpha \cos\alpha^2 \sin a\alpha \, d\alpha + \int_0^\infty \alpha \sin\alpha^2 \cdot e^{-a\alpha} d\alpha.$$

Ferner erhält man aus der Gleichung (161), indem man darin

$$f(x) = e^{-x^2}$$

und $\theta = -\frac{\pi}{4}$ setzt:

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

In Folge dessen ist:

$$(189) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \pi^{\frac{1}{2}}.$$

[60] und wird jetzt $x = \alpha + \frac{a}{2}$ gesetzt, so erschliesst man hieraus:

$$(190)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha^2 + a\alpha)} d\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{a^2}{4}} \\ \qquad = 2\int_0^{\infty} e^{i\alpha^2} \cos a\alpha \, d\alpha . \end{cases}$$

Differentiirt man jetzt nach der Grösse a, so ist:

$$(191)\quad \int_0^{\infty} \alpha e^{i\alpha^2} \sin a\alpha \, d\alpha = -\frac{1-i}{4\sqrt{2}} \pi^{\frac{1}{2}} a e^{-i\frac{a^2}{4}},$$

oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$(192)\quad \begin{cases} \int_0^{\infty} \alpha \cos\alpha^2 \sin a\alpha \, d\alpha = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}} a}{4\sqrt{2}} \left(\cos\frac{a^2}{4} - \sin\frac{a^2}{4}\right), \\ \int_0^{\infty} \alpha \sin\alpha^2 \sin a\alpha \, d\alpha = +\frac{\pi^{\frac{1}{2}} a}{4\sqrt{2}} \left(\cos\frac{a^2}{4} + \sin\frac{a^2}{4}\right). \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen werden die Formeln (187) und (188):

$$(193)\quad \int_0^{\infty} \alpha \cos\alpha^2 \cos a\alpha \, d\alpha = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} a}{4\sqrt{2}} \left(\cos\frac{a^2}{4} + \sin\frac{a^2}{4}\right) - \int_0^{\infty} \alpha \cos\alpha^2 e^{-a\alpha} d\alpha,$$

$$(194)\quad \int_0^{\infty} \alpha \sin\alpha^2 \cos a\alpha \, d\alpha = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} a}{4\sqrt{2}} \left(\cos\frac{a^2}{4} - \sin\frac{a^2}{4}\right) + \int_0^{\infty} \alpha \sin\alpha^2 e^{-a\alpha} d\alpha,$$

und die erste giebt:

$$(195)\quad \int_0^{\infty} \alpha \cos(2^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \alpha) \cos(\alpha^2) d\alpha$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}}{4} \left(\cos\frac{P}{2} + \sin\frac{P}{2}\right) - \int_0^{\infty} \alpha e^{-2^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \alpha} \cos(\alpha^2) d\alpha .$$

[61] Man überzeugt sich leicht, dass das Integral auf der rechten Seite für grosse Werthe von P im Wesentlichen null ist und sein numerischer Werth in allen Fällen kleiner ausfällt als der des Integrales

$$(196)\quad \int_0^{\infty} \alpha e^{-2^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \alpha} d\alpha = \frac{1}{2P}.$$

Wir möchten hinzufügen, dass man nur α durch u^2 zu ersetzen braucht, damit die Formel (195) mit der Gleichung (7) auf Seite 180 der Abhandlung über die Theorie der Wellen identisch wird.

Zusatz.

Wir haben Seite 35 bemerkt, dass die Formeln (103) und (104) die Werthe fast aller bestimmten Integrale liefern, die bekannt sind, und eine grosse Anzahl andrer. Wir wollen hier einige Anwendungen derselben Formeln angeben.

Bezeichnet man mit a und r positive Grössen, mit m eine ganze Zahl und mit $f(x)$ eine Function von der Beschaffenheit, dass der Ausdruck $f(x+iy)$ für positive Werthe von y nicht unendlich wird, so erhält man aus der Formel (103):

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{r - ix} = 0\,.$$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{r + ix} = 2\pi f(ir)\,.$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{(r - ix)^a} = 0\,.$$

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{(r + ix)^m} = (-1)^{m-1} \frac{2\pi}{\Gamma(m)} f^{(m-1)}(ir)\,.$$

[62]

(5) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{l(r - ix)}\,dx = -2\pi f[i(1-r)] & \text{für } r < 1\,. \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{l(1 - ix)}\,dx = -\pi f(0)\,. \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{l(r - ix)}\,dx = 0 & \text{für } r > 1\,. \end{cases}$$

und aus der Formel (104):

(6) $$\int_{0}^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{2i} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} f(0)\,.$$

$$(7)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{f(x)}{r+x} + \frac{f(-x)}{r-x}\right] dx = \pi i f(-r),$$

$$(8)\quad \int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2i}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} f(ir),$$

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi i}{4}\,[f(r)-f(-r)], \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2i}\,\frac{x\,dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{4}\,[f(r)+f(-r)], \end{cases}$$

$$(10)\quad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2i}\,\frac{r^2\,dx}{x(x^2+r^2)} = \frac{\pi}{2}\,[f(0)-f(ir)],$$

$$(11)\quad \int_0^\infty \left[\frac{f(x)}{l(x)-\frac{\pi i}{2}} + \frac{f(-x)}{l(x)+\frac{\pi i}{2}}\right] dx = -2\pi f(i),$$

u. s. w.

Wird in der Gleichung (7) $r = 1$ und $f(x) = (-ix)^{a-1}$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$(-i)^{a-1}\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x} + i^{a-1}\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1-x} = \pi i^a,$$

multiplicirt man auf beiden Seiten mit $(-i)^a$ und beachtet die Gleichung:

$$[\mathbf{63}]\quad (-i)^{2a-1} = \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2a-1} = \sin a\pi + i\cos a\pi,$$

so ist:

$$(\sin a\pi + i\cos a\pi)\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x} - i\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1-x} = \pi$$

und daher

$$(12)\qquad \int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$(13)\qquad \int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1-x} = \cos a\pi\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi}.$$

Die Formel (12) ist von *Euler* gegeben worden[20]. Die Formel (13) enthält auf der linken Seite ein Integral, dessen

allgemeiner Werth unbestimmt ist. Dieses Integral muss jedoch in dem gegenwärtigen Falle auf seinen Hauptwerth reducirt werden, den man in der Weise umformen kann, dass die Gleichung (13) mit einer andern Gleichung identisch wird, die der eben erwähnte berühmte Geometer aufgestellt hat.

Wird in den Formeln (8) und (9)

$$f(x) = e^{iax}$$

gesetzt, so ergeben sich die folgenden:

$$(14)\quad \int_0^\infty \frac{r\cos ax}{x^2+r^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+r^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-ar},$$

$$(15)\quad \int_0^\infty \frac{r\cos ax}{x^2-r^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\sin ar,\quad \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2-r^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cos ar.$$

Die Formel (14) ist von *Laplace* gegeben worden. Man erhält daraus, indem man r auf Null reducirt, die Gleichung:

$$(16)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

die ihrerseits ein besonderer Fall der Formel (6) ist[21]. Die Formeln (15), die zum ersten Male von Herrn *Bidone*, einem italienischen Geometer, gegeben worden sind[22], haben denselben Charakter wie die Formel (13) und [**64**] liefern die Hauptwerthe der in ihnen enthaltenen Integrale. Es ist indessen leicht, diese Hauptwerthe in bestimmte Integrale umzuformen, bei denen die Function unter dem Integralzeichen aufhört, für besondere Werthe der Veränderlichen unendlich gross zu werden. So erhält man zum Beispiel für $r = 1$ aus der ersten der Gleichungen (15):

$$(17)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \sin\frac{a}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\sin\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}\sin a.$$

Wird in den Formeln (5) und (11):

$$f(x) = \frac{1}{x}\,(1 - e^{iax})$$

gesetzt, wo a stets eine positive Constante bezeichnet, so ergiebt sich:

$$(18\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{iax}}{l(r-ix)}\frac{dx}{x} = \frac{2\pi i}{1-r}\left[1-e^{-a(1-r)}\right] & \text{für } r<1\,, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{iax}}{l(1-ix)}\frac{dx}{x} = \pi i a\,, & \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{iax}}{l(r-ix)}\frac{dx}{x} = 0 & \text{für } r>1\,. \end{cases}$$

und

$$(19\quad \int_0^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}(1-\cos ax) - \sin ax\cdot l(x)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + [l(x)]^2}\frac{dx}{x} = \pi(1-e^{-a})\,.$$

Man erhält ferner aus den Formeln (1), (2), (6), (8) und (9), wenn a, b, r, s positive Grössen bezeichnen:

$$(20\quad \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{a-1}e^{ibx}\,l\left(1+\frac{is}{x}\right)\frac{dx}{r-ix} = 0\,.$$

[65]

$$(21\quad \int_{0}^{+\infty} (-ix)^{a-1}e^{ibx}\,l\left(1+\frac{is}{x}\right)\frac{dx}{r+ix} = 2\pi r^{a-1}e^{-br}\,l\left(1+\frac{s}{r}\right)\,.$$

$$(22)\quad \int_0^{\infty} x^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2}r^{a-1}e^{-br}\,,$$

$$(23)\quad \int_0^{\infty} x^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)\frac{r\,dx}{r^2-x^2} = \frac{\pi}{2}r^{a-1}\cos\left(\frac{a\pi}{2}-br\right)\,.$$

$$(24\quad \int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}(e^a-1)\ ^{23)}\,,$$

$$(25\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\cos(a\sin bx)\frac{r\,dx}{x^2+r^2} \\ \displaystyle= \int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{ae^{-br}}-1\right)\ ^{24)}\,. \end{cases}$$

$$(26)\quad \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{\cos bx}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-\sin bx\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}r^{a-1}e^{e^{-br}}\,.$$

Wird in den Formeln (20) und (21) $a = 1$, $b = 0$ gesetzt, so erschliesst man daraus:

$$(27)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} l\left(1 + \frac{is}{x}\right)\frac{dx}{r - ix} = 0\,; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} l\left(1 + \frac{is}{x}\right)\frac{dx}{r + ix} = 2\pi\, l\left(1 + \frac{s}{r}\right). \end{cases}$$

und daher ist:

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{\infty} l\left(1 + \frac{s^2}{x^2}\right)\frac{r\,dx}{x^2 + r^2} = \pi\, l\left(1 + \frac{s}{r}\right), \\ \displaystyle\int_{0}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{s}{x}\cdot\frac{x\,dx}{x^2 + r^2} = \frac{\pi}{2}\, l\left(1 + \frac{s}{r}\right). \end{cases}$$

Differentiirt man alsdann $n - 1$ Mal nach r, so kommt:

[66] (29)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{(r - ix)^{-n} + (r + ix)^{-n}}{2}\, l\left(1 + \frac{s^2}{x^2}\right)dx = \frac{\pi}{n-1}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^n - \left(\frac{1}{r+s}\right)^n\right], \\ \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{(r - ix)^{-n} - (r + ix)^{-n}}{2i}\operatorname{arctg}\frac{s}{x}\,dx = \frac{\pi}{2(n-1)}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^n - \left(\frac{1}{r+s}\right)^n\right]. \end{cases}$$

Wird ferner in den Gleichungen (9) $f(x)$ durch

$$l\left(1 + \frac{is}{x}\right)$$

ersetzt, so ergiebt sich:

$$(30)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{\infty} l\left(1 + \frac{s^2}{x^2}\right)\frac{r\,dx}{x^2 - r^2} = -\pi\operatorname{arctg}\frac{s}{r}\,; \\ \displaystyle\int_{0}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{s}{x}\cdot\frac{x\,dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{4}\, l\left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right). \end{cases}$$

u. s. w.

Wir wollen hinzufügen, dass aus der zweiten der Formeln (29), indem darin $r = 1$ und $s = 1$ gesetzt wird, sich ohne Mühe die folgenden ableiten lassen:

$$(31)\quad \int_0^{\infty} (\operatorname{arc\,cot} x)^2\,dx = 2\int_0^{\infty} \operatorname{arc\,cot} x\,\frac{x\,dx}{x^2+1} = \pi\, l(2),$$

$$(32)\quad \int_0^1 \frac{x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x - \dfrac{1}{x}}\,dx = \frac{\pi}{4}\, l(2).$$

Es kann eintreten, dass die Formeln (1), (2), ... nach unserer Bemerkung auf Seite 36 in gewissen Fällen gültig bleiben, wo die Function $f(x+iy)$ für positive Werthe von y unendlich wird. Das findet im Besonderen für die Formeln (8) und (9) statt, wenn $f(x)$ sich für $a < b$ auf den Quotienten von $\sin ax$ oder $\cos ax$ durch $\sin bx$ oder $\cos bx$ reducirt. Alsdann findet man:

$$(33)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{ar}+e^{-ar}}{e^{br}+e^{-br}}, \\ \int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{ar}-e^{-ar}}{e^{br}-e^{-br}}, \\ \int_0^\infty \frac{\cos ax}{\sin bx} \frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{ar}+e^{-ar}}{e^{br}-e^{-br}}, \\ \int_0^\infty \frac{\sin ax}{\cos bx} \frac{x\,dx}{x^2+r^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{ar}-e^{-ar}}{e^{br}+e^{-br}}. \end{cases}$$

[**67**] Diese Formeln, die ich in der Abhandlung von 1814 gegeben hatte, nur dass an Stelle von r die Einheit trat, hat Herr *Legendre* in seinem Berichte über diese Abhandlung und in dem fünften Theile der Exercices de Calcul intégral erwähnt.

Den vorhergehenden Beispielen könnte man unzählig viele andre hinzufügen. Ich werde mich jedoch damit begnügen, nur einige anzugeben. Stellt man, wie vorher, durch a, b, r, s positive Grössen dar, bezeichnet ferner mit θ einen Bogen zwischen den Grenzen 0 und π und mit $\varphi(x)$ eine rationale Function der Veränderlichen x, so lassen sich ohne Mühe aus der Formel (103) die Werthe der Integrale herleiten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{a-1} \varphi(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibx} \varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l\left(1+\frac{is}{x}\right) \varphi(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} l(1-irx)\,\varphi(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l\,[r\sin\theta + i(r\cos\theta - x)]\,\varphi(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{a-1} e^{ibx} \varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{a-1}\, l\left(1+\frac{is}{x}\right) \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-ix)^{a-1}}{l(r-ix)} \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-ix)^{a-1}}{l(r-ix)}\, e^{ibx}\, l\left(1+\frac{is}{x}\right) \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ae^{ibx}} \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{a-1} e^{ae^{ibx}} \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(1+re^{ibx}) \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibx}\, l(1+re^{ibx}) \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{\cos bx} \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{\sin ax} \varphi(x)\, dx\,,$$

u. s. w.,

und daher auch die Werthe der Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1} \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos bx\, \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin bx\, \varphi(x)\, dx\,,$$

[68] $$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{s}{x} \cdot \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arc\,cot} x \cdot \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(r^2 - 2rx\cos\theta + x^2)\, \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{r\cos\theta - x}{r\sin\theta}\, \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\cos bx} \cos(a\sin bx)\, \varphi(x)\, dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\cos bx} \sin(a\sin bx)\, \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(1 + 2r\cos bx + r^2)\, \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{r\sin bx}{1 + r\cos bx}\, \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{a-1} \sin\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right) \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}\, dx\,,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{l(x)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + [l(x)]^2}\, \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}\, dx\,,$$

u. s. w.

Wir bemerken zum Schluss, dass die Constanten in einigen der vorher ermittelten Integrale in solche Grenzen eingeschlossen werden müssen, dass die Werthe dieser Integrale endlich bleiben. So wird man im Besonderen ohne Mühe erkennen, dass die Constante a in den Formeln (12) und (13) innerhalb der Grenzen 0 und 1 bleiben muss und innerhalb der Grenzen 0 und 2 in den Formeln (22), (23), (26). Wir wollen hinzufügen, dass man in mehreren Formeln die als reell vorausgesetzten Constanten durch imaginäre Constanten ersetzen darf. Zum Beispiel darf die Constante a in den Formeln (12), (13), (23), (26) imaginär werden. Nur muss alsdann der reelle Theil von a innerhalb der soeben angegebenen Grenzen liegen.

Anmerkungen.

Augustin-Louis Cauchy, geboren den 21. August 1789 zu Paris, wo sein Vater Advocat war, zeigte schon als Knabe hervorragende mathematische Begabung, sodass er das Interesse von *Lagrange* erregte. Nachdem er seit 1805 zuerst die École polytechnique, darauf die École des Ponts et des Chaussées besucht und die Prüfungen mit der grössten Auszeichnung bestanden hatte, wurde er 1810 als Ingenieur nach Cherbourg geschickt, das Napoleon I. zu einem grossartigen Kriegshafen umzugestalten plante. Seine Mussestunden benutzte er, wie er in einem Briefe schreibt, »zu einer systematischen Wiederholung der ganzen Mathematik, um dabei die Beweise zu vereinfachen und neue Sätze zu entdecken«. Diese Worte des Jünglings kennzeichnen den Mann, sowohl sein kritisches Bestreben, die Analysis auf sichere Grundlage zu stellen und die im achtzehnten Jahrhundert arg vernachlässigte Strenge der Beweise wiederherzustellen, als auch die schöpferische Seite seines Talentes, die auf den verschiedensten Gebieten der reinen und angewandten Mathematik zur Geltung gekommen ist.

Im Jahre 1813 kehrte *Cauchy* nach Paris zurück, um sich ausschliesslich mathematischen Studien zu widmen. Bei der Preisbewerbung für 1815, bei der es sich um die Theorie der Fortpflanzung der Wellen an der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit handelte, wurde seine Abhandlung von der Akademie gekrönt; als ihr Vorläufer ist eine andre umfangreiche Abhandlung über die Theorie der bestimmten Integrale anzusehen, die er am 22. August 1814 dem Institute überreicht hatte und die von *Legendre* sehr günstig beurtheilt worden war. Bereits 1816 wurde *Cauchy* Mitglied des Instituts und bald darauf Professor an der École polytechnique, später auch an der Sorbonne und dem Collège de France. Früchte seiner Lehrthätigkeit waren die klassischen Werke: »Cours de l'Analyse de l'École royale polytechnique«, Paris 1821 und: »Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal«, Paris 1823.

Als getreuer Anhänger der Bourbonen weigerte sich *Cauchy* im Jahre 1830 der neuen Regierung den Eid zu leisten und verliess Frankreich. Nachdem er einige Zeit in Freiburg (in der Schweiz) und in Turin verweilt hatte, ging er nach Prag, um die Erziehung des ältesten Sohnes Karls X., des späteren Grafen Chambord, zu leiten. Mit dem Titel eines Barons belohnt, kehrte er 1838 nach Paris zurück und nahm seinen Sitz in dem Institut wieder ein, dessen Comptes rendus er durch zahlreiche Beiträge bereicherte. Aber erst die Revolution von 1848, die den politischen Eid beseitigte, gab ihm die Möglichkeit, seine Lehrthätigkeit wieder aufzunehmen, und hierin brachte auch das zweite Kaiserreich keine Aenderung, da Napoleon III. ihm grossmüthig gestattete, auch ohne Treuschwur die Vorlesungen fortzusetzen. Am 22. Mai 1857 fand *Cauchys* arbeitsreiches Leben ein Ende.

Eine ausführliche Biographie verdanken wir *C. A. Valson* (La vie et les travaux du baron Cauchy. Zwei Bände. Paris 1868), der auch vom Standpunkte des begeisterten Schülers aus die Bedeutung der Untersuchungen *Cauchys* auf den Gebieten der Mathematik, Physik und Astronomie geschildert hat. Hier kommen nur die Leistungen *Cauchys* für die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen in Betracht, die von *A. Brill* in ausgezeichneter Weise dargestellt worden sind (Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Dritter Band. S. 160—197. Berlin 1894); als Ergänzung hierzu kann der werthvolle Bericht von *F. Casorati* (Teorica delle funzioni di variabili complesse. Notizie storiche. Serie seconda. S. 62—143. Pavia 1868) sowie ein Aufsatz von *P. Stäckel* dienen (Integration durch imaginäres Gebiet. Bibliotheca Mathematica. Dritte Folge, Bd. I. Leipzig 1900), in dem die Vorarbeiten von *Leibniz*, *Johann Bernoulli*, *d'Alembert*, *Laplace*, besonders aber von *Euler* und *Poisson* behandelt werden.

Die Arbeiten *Cauchys*, die zur Entwicklung der Functionentheorie beigetragen haben, lassen sich, wie *Brill* bemerkt, in zwei Gruppen theilen, die ganz verschiedene Ausgangspunkte besitzen und zunächst ganz verschiedene Ziele im Auge haben. Die eine bezieht sich auf Integrale mit imaginären Grenzen. Das Interesse ist dabei ursprünglich die Ermittelung bestimmter Integrale, die in der mathematischen Physik am Anfange des neunzehnten Jahrhunderts eine grosse Rolle spielten. Die andre

knüpft an die Reversionsformel von *Lagrange* an und behandelt die Wurzeln einer Gleichung mit veränderlichem Parameter, ihre Entwicklung in Reihen und deren Convergenz. Hier sind Aufgaben aus der Mechanik des Himmels das treibende Moment gewesen, sodass sich auch für die Functionentheorie der Satz bewährt, dass die fruchtbaren allgemeinen Theorien der Mathematik aus der Vertiefung in besondere Aufgaben hervorgegangen sind.

Bei der ersten Gruppe von Arbeiten kann man zwei Perioden unterscheiden. Die erste, bei der die bestimmten Integrale noch im Vordergrunde stehen, von 1814 bis 1826, die zweite, bei der *Cauchy* seine Sätze auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, die Convergenz der Reihen u. s. w. anwendet und schliesslich die Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen herausarbeitet, von 1840 bis 1851. Ein Bindeglied zwischen ihnen bildet der Residuencalcul, dessen Anfänge in das Jahr 1826 fallen.

Die erste Periode beginnt mit dem schon erwähnten Mémoire sur les intégrales définies vom Jahre 1814, auf das wir etwas ausführlicher eingehen müssen, da *Cauchy* die Bekanntschaft mit ihm bei seinen späteren Arbeiten immer voraussetzt.

Eine von *Laplace*, *Legendre* und *Poisson* mit Erfolg angewandte Methode, Relationen zwischen bestimmten Integralen zu erhalten, beruhte darauf, dass bei einem passend gewählten Doppelintegrale mit constanten Grenzen die Integration einmal zuerst nach der einen, alsdann zuerst nach der andern Veränderlichen ausgeführt und die so entstehenden einfachen Integrale einander gleichgesetzt wurden. *Cauchy* fragte nun, wann dieses Verfahren überhaupt durchführbar sei und unter welchen Bedingungen es zu richtigen Resultaten führe. Die Antwort auf die erste Frage lautet im Wesentlichen so: in einer reellen Function der reellen Veränderlichen z setze man $z = x \pm iy$, wodurch sie in $M \pm iN$ übergehen möge. Dann bestehen die bereits von *Euler* erkannten Identitäten:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}.$$

und es ist daher:

$$\text{A)} \quad \begin{cases} \displaystyle\iint \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy, \\ \displaystyle\iint \frac{\partial M}{\partial x}\,dx\,dy = \iint \frac{\partial N}{\partial y}\,dx\,dy. \end{cases}$$

wo sich links und rechts je eine Integration sofort ausführen lässt. Damit die so gewonnenen einfachen Integrale einander gleich sind, dürfen — und das war eine bis dahin ganz übersehene Bedingung — die Integranden in dem ganzen Integrationsgebiete, das als Rechteck in der xy-Ebene aufgefasst werden kann, nirgends unbestimmt werden.

Cauchy zeigte auch, wie man in gewissen Fällen, in denen Stellen der Unbestimmtheit auftreten, den Unterschied der beiden Integrale bestimmen kann, und kam dabei auf den Begriff der singulären Integrale, den er später (Résumé des leçons, Leçon 25 und die 1825 bei der Drucklegung hinzugefügte Note XVIII der Preisschrift vom Jahre 1815) noch etwas erweitert hat. Wird nämlich das unbestimmte Integral von $f(x)$ mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so hat das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

den Werth $\varphi(X) - \varphi(x_0)$, sobald $f(x)$ in dem Intervalle $(x_0 \ldots X)$ eindeutig, endlich und stetig ist. Wird $f(x)$ für eine Stelle a dieses Intervalles unendlich, so verliert das bestimmte Integral seinen ursprünglichen Sinn, man kann aber jenem Zeichen auch in diesem Falle eine Bedeutung beilegen, indem man definirt, dass alsdann

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{x_0}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon\nu}^{X} f(x)\,dx \right\}$$

sein soll, wo μ und ν irgend welche positive Constanten bedeuten. Als Hauptwerth H des Integrales auf der linken Seite bezeichnet *Cauchy* den Grenzwerth, der sich für $\mu = \nu = 1$ ergiebt, es ist also

$$H = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{x_0}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx \right\}$$

und daher

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx - H = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Die beiden letzten Integrale nennt *Cauchy* singuläre Integrale. Wird $f(x)$ in der Weise unendlich, dass

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\frac{1}{x-a}}$$

einen bestimmten endlichen Werth l hat, so wird

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = H + l\cdot\log\frac{u}{v},$$

hängt also im Allgemeinen von der Wahl der Constanten u und v ab.

Der Zusammenhang der Gleichungen (A) mit der Theorie der bestimmten Integrale zwischen complexen Grenzen blieb in der Abhandlung vom Jahre 1814 noch im Dunkeln. Er trat erst zu Tage, als *Cauchy* diese beiden Gleichungen zwischen reellen Grössen zu einer einzigen Gleichung mit complexen Grössen vereinigte. Dieser grundlegende Gedanke findet sich zuerst in einer Abhandlung, die *Cauchy* am 28. October 1822 der Pariser Akademie vorlegte und über die er in der Novembernummer des Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris von demselben Jahre berichtet hat (Sur les intégrales définies où l'on fixe le nombre et la nature des constantes arbitraires, S. 161—174). Mit einigen Aenderungen ist dieser Bericht wieder abgedruckt in dem Juli 1823 erschienenen 19. Hefte des Journal de l'École polytechnique, und zwar als Anhang zu der Abhandlung: Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et coefficiens constans (Observations générales et additions, S. 571—589), und die Ergebnisse jener Abhandlung vom 28. October 1822 haben auch in dem Resumé des leçons vom Jahre 1823 Aufnahme gefunden (siehe Leçon 33 und 34).

Durch die Vereinigung der Gleichungen (A) gewinnt *Cauchy* die fundamentale Formel:

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X} f(x+iy_0)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} f(X+iy)\,dy \\ \displaystyle= \int_{x_0}^{X} f(x+iY)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} f(x_0+iy)\,dy + \Delta. \end{cases}$$

Die Correction Δ rührt von den Unendlichkeitsstellen der Function $f(z)$ her: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, ..., bei denen $x_1, x_2, \ldots$ zwischen x_0 und X, $y_1, y_2, \ldots$ zwischen y_0 und Y liegen, und hat, wenn

$$\lim_{z=z_1}(z-z_1)f(z) = f_1,\quad \lim_{z=z_2}(z-z_2)f(z) = f_2,\ \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird, den Werth

$$2\pi i(f_1 + f_2 + \cdots);$$

fällt eine Unendlichkeitsstelle in die Grenzen, wo x bezw. y gleich x_0, X bezw. y_0, Y sind, so ist als Correction nur die Hälfte zu nehmen.

Die Formel (B), die sich als ausserordentlich fruchtbar für die Theorie der bestimmten Integrale erwiesen hatte, auf directem Wege herzuleiten, ist der eine Zweck des klassischen Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, das als besonderes Werkchen im August 1825 erschienen ist, nachdem im April 1825 das Bulletin de Férussac eine Voranzeige gebracht hatte; der andre besteht in der ausgiebigen Anwendung jener Formel auf die Theorie der bestimmten Integrale. Der erste Zweck erforderte, dass *Cauchy* »den Grad der Allgemeinheit feststellte, den ein bestimmtes Integral zwischen imaginären Grenzen zulässt, und die Zahl der Werthe, die es annehmen kann«, und mit Recht pflegt man daher die Geschichte der Functionentheorie mit dieser klassischen Abhandlung zu beginnen. Es lässt sich freilich nicht verkennen, dass *Cauchy* den wahren Sinn seiner Resultate lange Zeit nicht vollständig erkannt hat und dass, wie *Brill* sich ausdrückt, »die Bedeutung seiner Abhandlung erst durch spätere Anwendungen — zum Theil in den Händen Anderer — in das richtige Licht gesetzt wurde«, und man kann daher nur bedingt *Valson*s enthusiastischem Lob beistimmen: »Diese Abhandlung kann als die bedeutendste Arbeit *Cauchy*s angesehen werden, und sachkundige Männer stellen sie unbedenklich in eine Reihe mit dem Schönsten, was der menschliche Geist auf dem Gebiete der Wissenschaft hervorgebracht hat.«

Wenn *Valson* weiter bemerkt, auch *Gauss* habe ungefähr zu derselben Zeit entdeckt, dass die Integrationsordnung bei Doppelintegralen nicht ohne Weiteres umgekehrt werden dürfe (Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia. Comment. Götting. 1816. Werke, Bd. III, S. 57—64), »dagegen fehle bei ihm ganz und gar der fundamentale Begriff von Integralen zwischen imaginären Grenzen«, so hat der 1880 veröffentlichte Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Bessel* gezeigt, dass jener schon im Jahre 1811 diesen Begriff besessen und sich in Bezug auf die Integration durch imaginäres Gebiet zu einer Freiheit der

Auffassung erhoben hatte, die *Cauchy* erst im Jahre 1840 erreicht hat (Brief an *Bessel* vom 18. Dec. 1811, wieder abgedruckt *Gauss'* Werke, Bd. VIII, S. 89—91).

Das Vorstehende wird genügen, um die Aufnahme der oft angeführten, aber schwer zugänglichen und selten gelesenen Abhandlung *Cauchys* vom August 1825 in die Sammlung der Klassiker zu begründen; es möge noch bemerkt werden, dass sie in den bis jetzt erschienenen Bänden der seit 1882 herausgegebenen Oeuvres complètes nicht enthalten ist, dass aber das Bulletin des Sciences mathématiques (t. VII, S. 265—304, Paris 1874, t. VIII, S. 43—55, 148—159, Paris 1875) einen Wiederabdruck gebracht hat.

Die folgenden Anmerkungen enthalten Litteraturangaben sowie Erläuterungen zu schwierigen Stellen.

Die zahlreichen Druckfehler des Originals sind ohne weiteres verbessert worden. Auch sonst sind einige kleine Aenderungen erforderlich gewesen, die in den Anmerkungen angegeben werden. Der Grund dafür liegt hauptsächlich darin, dass *Cauchy* die Formel (B) (bei ihm [88]) auch auf den Fall anwendet, dass die ursprünglich als endlich vorausgesetzten Grenzen x_0, X; y_0, Y unendlich werden, und dabei annimmt, dass die ins Unendliche erstreckten Integrale in der Formel (B) verschwinden, wenn $f(z)$ auf dem Integrationswege zur Grenze Null strebt. Diese Bedingung ist jedoch für das Verschwinden zwar nothwendig, aber nicht hinreichend, sodass die Formeln (103) und (135) nicht in allen Fällen richtige Resultate geben, ein Umstand, auf den *Cauchy* selbst in § 14 aufmerksam gemacht, den er jedoch nicht immer genügend beachtet hat. *Cauchy* selbst hat in der 1826 erschienenen Abhandlung: Sur diverses relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies (Exercices de Mathématiques, 1. Année, S. 95—113, Paris 1826, wiederabgedruckt Oeuvres complètes, série 2, t. VI, S. 124—145) diese Frage genauer untersucht und die von ihm begangenen Fehler verbessert.

Hinsichtlich der Bezeichnung ist insofern eine Aenderung vorgenommen worden, als durchgängig $\sqrt{-1}$ durch i ersetzt ist, wodurch die Formeln an Uebersichtlichkeit erheblich gewonnen haben.

Endlich möge noch bemerkt werden, dass, wie es in dieser Sammlung üblich ist, die Seitenzahlen der Originalabhandlung in eckigen Klammern dem Texte beigefügt worden sind.

1) *Zu S. 1.* Hierfür kommen in Betracht die Abhandlungen: Sur l'approximation des formules qui sont fonctions de très-grands nombres. Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1782. Paris 1785. S. 1—88, Sur l'approximation des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités, lu le 9 avril 1810, Mémoires de la classe mathématique et physique de l'Institut de France. t. X. Année 1809. S. 353—415, 559—565. Paris 1810 und Mémoire sur les intégrales définies, et leur application aux probabilités, ebendaselbst, t. XI. Année 1810. S. 279—347. Paris 1811, Abhandlungen, deren Inhalt zum grossen Theil in *Laplaces* Werk: Théorie analytique des probabilités, Paris 1812 übergegangen ist.

2) *Zu S. 4. Barnabé Brisson* (1777—1828) hatte in einer Abhandlung Sur l'Intégration des Équations différentielles partielles (Mémoire envoyé à l'Institut en Praivial an 12 [Juni 1804]), Journal de l'École polytechnique, Cahier 14, S. 191—254. Paris 1808 Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{\alpha_\nu x + \beta_\nu y}$$

in denen A_ν, α_ν, β_ν gewisse Constanten bedeuten, durch bestimmte Integrale ausgedrückt. Seine weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand, auf die *Cauchy* hindeutet, scheint er nicht veröffentlicht zu haben.

3) *Zu S. 4. Michel Ostrogradskij* (1801—1861) hat die Theorie der Integrale mit imaginären Grenzen behandelt in der Note sur les intégrales définies, lu le 29 Oct. 1828 (Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, sixième série, Sciences mathématiques, physiques et naturelles, t. I, S. 117—122. Petersburg 1831).

4) *Zu S. 5. Cauchy* setzt stillschweigend voraus, dass die Function $f(x)$ für alle betrachteten Werthe von x einen einzigen bestimmten Werth besitzt; jedoch hat er später, in § 12. S. 27 (hier S. 28), diese Voraussetzung auch ausdrücklich ausgesprochen. Erst im Jahre 1846 ist *Cauchy* zu der Betrachtung mehrdeutiger Functionen unter den Integralzeichen übergegangen (Comptes Rendus, t. 23. S. 689, Paris 1846) und hat dadurch die Untersuchungen über die algebraischen Functionen

angebahnt, die wir *Puiseux* verdanken (Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par Liouville, t. 15 und 16, 1850 und 1851).

5) *Zu S. 10.* Setzt man nämlich $t = \tau + \varepsilon w$ und entwickelt nach Potenzen von ε, so wird:

$$x = a + \varepsilon w \alpha + \cdots, \quad x' = \alpha + \varepsilon w x''(\tau) + \cdots$$
$$y = b + \varepsilon w \beta + \cdots, \quad y' = \beta + \varepsilon w y''(\tau) + \cdots,$$

also

$$(x - a) + i(y - b) = \varepsilon w(\alpha + i\beta) + \cdots,$$
$$x' + iy' = \alpha + i\beta + \varepsilon w(x'' + iy'') + \cdots,$$

woraus die erste Formel folgt. Ferner wird auf dieselbe Art

$$u = \gamma + \varepsilon w u'(\tau) + \cdots, \quad v = \delta + \varepsilon w v'(\tau) + \cdots,$$

mithin

$$x - a + \varepsilon u + i(y - b + \varepsilon v) = \varepsilon w(\alpha + i\beta) + \varepsilon(\gamma + i\delta) + \cdots,$$

und hieraus ergiebt sich mit Hilfe von (23) die zweite Formel.

6) *Zu S. 29.* Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique. Ire Partie: Analyse algébrique. Chap. IX. § III. Paris 1821. Wieder abgedruckt Oeuvres complètes. IIe série, t. III. S. 256—273. Paris 1897.

7) *Zu S. 30.* *Laplace* hat die Formel (91) in der Théorie analytique des probabilités (1. édition Paris 1812, 3. éd. 1820, S. 96) folgendermaassen hergeleitet. Wird $\cos 2bx$ durch

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{2ibx} + e^{-2ibx}\right)$$

ersetzt, so verwandelt sich das gesuchte Integral in die Summe von zwei Integralen, bei denen er beziehungsweise

$$x = t + ib \quad \text{und} \quad x = t - ib$$

substituirt. Auf diese Weise ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2} e^{-b^2}\left(\int_{-ib}^{\infty} e^{-t^2} dt + \int_{+ib}^{\infty} e^{-t^2} dt\right),$$

also, wenn man in dem ersten Integrale $-t$ statt $+t$ schreibt und dann beide Integrale vereinigt:

$$\tfrac{1}{2} e^{-b^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = e^{-b^2} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

8) *Zu S. 31.* Die von *Euler* in der Abhandlung: De vero valore formulae integralis

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^2$$

a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae Nova Acta, t. VIII ad annum 1790. Petropoli 1794) begonnenen Untersuchungen hatte *Legendre* fortgesetzt (Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies. Lu le 13 novembre 1809. Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France. t. X. Année 1809. S. 416—509. Paris 1810) und (S. 477):

$$\int_0^1 dx \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1} = \Gamma(a)$$

gesetzt; vergl. auch seine Exercices du calcul intégral. t. II. Paris 1817.

9) *Zu S. 31.* *Cauchy* hatte seiner Preisschrift: Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie vom Jahre 1815 mit dreizehn Noten versehen, denen er im Jahre 1825, als sie gedruckt werden sollte, sieben Noten hinzugefügt hat. Die im Texte erwähnten Entwickelungen finden sich in der Note XVI (Oeuvres complètes, 1[re] série, t. 1. S. 235—239).

10) *Zu S. 32.* Aus (94) ergiebt sich zunächst als Werth der rechten Seite

$$\int_0^\infty \left(e^{-iy} - \frac{1}{1+iy}\right)\frac{dy}{y}$$

oder durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$\int_0^\infty \left(\cos y - \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{y} - i\int_0^\infty \left(\sin y - \frac{y}{1+y^2}\right)\frac{dy}{y}.$$

Dass das zweite Integral verschwindet, folgt unmittelbar aus der Realität der linken Seite, es lässt sich aber auch mittelst der Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\sin y\, dy}{y} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$$

darthun.

11) *Zu S. 37.* In der Addition III seiner Théorie des probabilités (1. éd. 1812, 3. éd. 1820, S. 470—475) betrachtet *Laplace* das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ai\varpi}\, d\varpi}{(1-i\varpi)^{\lambda+1}},$$

das mit der linken Seite der Gleichung (101) gleichbedeutend ist. *Cauchy*s Abhandlung vom Jahre 1815 ist erst 1841 unter dem Titel: Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies, et sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espece. Présenté à l'Académie le 2 janvier 1815 im Journal de l'École polytechnique, Cahier 28, S. 147—248 veröffentlicht worden.

12) *Zu S. 41.* Damit die Formel (135) gilt, genügt es augenscheinlich nicht, dass $f(z)$ eine rationale Function von z ist, die verschwindet, wenn die complexe Veränderliche z unendlich grosse Werthe annimmt, vielmehr muss der Grad des Zählers um zwei Einheiten kleiner sein als der des Nenners. Man erkennt hieraus, dass die Gleichung (88), die unter der Voraussetzung endlicher Werthe von x_0, y_0, X, Y abgeleitet wurde, nicht ohne weiteres auf unendliche Grenzen angewandt werden darf, die vielmehr eine besondere Untersuchung erfordern. *Cauchy* hat das sehr wohl erkannt, geht aber erst in § 14, S. 47 (hier S. 45) auf diese Frage ein. Vergl. auch die Bemerkungen S. 72 dieses Heftes.

Die im Texte angeführte Abhandlung hat den Titel: Sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques und war im Jahre 1815 erschienen.

13) *Zu S. 44.* Die Näherungsformel für $n!$ findet sich im Wesentlichen schon bei *Stirling*, Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, London 1730, wie bereits *Maclaurin* im Jahre 1742 hervorgehoben hat (A treatise of fluxions in two books, Edinburg 1742, art. 842, S. 682—684). Während *Stirling* die Formel von *Wallis* benutzt hatte, gelangte *Laplace* im Jahre 1782 (vergl. Anmerkung 1) durch eine neue, directe Methode zum Ziele.

14) *Zu S. 51.* Im Originale steht links $f(p, r)$ statt $\varphi(p, r) + i\chi(p, r)$.

15) *Zu S. 52.* *Cauchy* hatte in der That die Gleichung (174) bereits in der S. 70 erwähnten Abhandlung im Bulletin des Sciences par la Societé philomatique de Paris, Année 1822, S. 169 angegeben. *Fourier*s Abhandlung führt den Titel:

Recherches sur la sommation des termes de la série de Taylor, et sur les intégrales définies und ist in den Annales de Mathématiques pures et appliquées von *Gergonne*, t. 15, S. 165—189, Nismes, December 1824 erschienen. *Vernier* leitet daselbst S. 180 die Formel

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(z)\,dz = -i\int_0^{\pi} e^{ix}\varphi(e^{ix})\,dx\,,$$

bei der also das Ergänzungsglied $i\Delta$ fehlt, unter der Voraussetzung her, dass $\varphi(z)$ in einer Potenzreihe

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}z + \frac{\varphi''(0)}{2!}z^2 + \cdots$$

entwickelt werden kann, die für $|z| \leq 1$ convergirt. In einer Note sur quelques-uns des résultats obtenus par *M. Vernier*, a. a. O., S. 360—364 hat *Gergonne* darauf hingewiesen, dass verschiedene Formeln *Verniers* und darunter auch die eben angeführte schon von *Cauchy* hergeleitet worden seien.

16) *Zu S. 54.* *Marc-Antoine Parseval*, Méthode générale pour sommer, par le moyen des intégrales définies, la suite donnée par le théorème de M. Lagrange, au moyen de laquelle il trouve une valeur qui satisfait à une équation algébrique ou transcendente. Mémoires présentés à l'Institut par divers savants. Sciences mathématiques et physiques. Série 1, t. I. Paris. An XIV [1805], S. 567—586.

G. Libri, Mémoire sur divers points d'analyse. Lu le 14 Juillet 1822. Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. t. XXVIII. Torino 1824. S. 251—280.

17) *Zu S. 54.* In *Cauchys* Veröffentlichungen findet sich nirgends die Anwendung seiner Theorie auf doppelte oder mehrfache Integrale behandelt. Erst 1887 ist *Poincaré* auf diese Frage eingegangen (Sur les résidus des intégrales doubles. Acta mathematica, t. IX. S. 321—380. Stockholm 1887) und hat bewiesen, dass ein Doppelintegral

$$\iint F(x, y)\,dx\,dy$$

ausgedehnt über eine geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit (Fläche) in dem vierdimensionalen Raume, dessen Punkte die complexen Werthsysteme x, y darstellen, ver-

schwindet, wenn man die Fläche durch stetige Deformationen auf einen Punkt oder eine Curve reduciren kann, ohne dabei Werthsysteme x, y zu treffen, für die $F(x, y)$ unendlich wird. Man vergleiche auch *Picard*, Traité d'Analyse, t. II, S. 248—262. Paris 1893.

18) *Zu S. 55.* Oeuvres complètes, Série 1, t. I. S. 318.

19) *Zu S. 56.* Ebendaselbst S. 124.

20) *Zu S. 59.* *Euler*, Institutiones calculi integralis. t. I, art. 351. Petersburg 1768; vergl. auch *Cauchy*, Oeuvres complètes, série 1, t. I. S. 433.

21) *Zu S. 60.* *Laplace*, Mémoire sur les intégrales définies, et leur application aux probabilités. Mémoires de la classe mathématique et physique de l'Institut de France. t. XI. Année 1810. S. 293. Paris 1811. Die Gleichung (16) war bereits von *Euler* angegeben worden: De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum. Academiae exhib. die 30. Aprilis 1781, abgedruckt Institutiones calculi integralis, t. IV, S. 337—345. Petersburg 1794.

22) *Zu S. 60.* *G. Bidone*, Mémoire sur diverses intégrales définies, lu le 23 Mai 1812. Mémoires de l'Académie impériale des Sciences pour les années 1811—1812. Sciences physiques et mathématiques [t. XX]. S. 231—344. Turin 1813.

23) *Zu S. 61.* Auf den rechten Seiten der Formeln (24) und (26) steht im Originale irrthümlicher Weise:

$$\frac{\pi}{2} e^{a}, \qquad \frac{\pi}{2} e^{ae^{-bx}};$$

Cauchy selbst hat in der S. 72 angeführten Abhandlung vom Jahre 1826 diese Fehler verbessert.

Kiel, im December 1899.

P. Stäckel.

Inhaltsverzeichniss.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.